

彰化縣 114 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選
作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別：
☐ 國小組
☒ 國中組
☒ 數學類
☐ 自然與生活科技類
☐ 人文社會類

作品名稱：均值的多重宇宙之謎

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予評審並退件。

第一階段研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

近二年，獨立研究已發展成本校資優生的必修課程，並由輔導室負責規劃課程，其具體內容如下：

(一) 上課時段

七年級：每週一下午第五節彈性課程時間。

八年級：每週三下午第五節彈性課程時間。

九年級：每週三下午第五節彈性課程時間。

(二) 上課地點

七年級：資優教室。

八年級：生物實驗室、理化實驗室、電腦教室、圖書館、資源教室、語文藝術教室。

九年級：資優教室。

(三) 核心能力

1. 七年級

在老師的引導下：

(1) 能學會發現問題並積極蒐集相關資料。

(2) 能學會擬定架構與分析資料。

(3) 能統整研究資料與撰寫報告。

2. 八年級

資優生自己選定數學、自然與生活科技、人文社會中，感興趣的主題，依據發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之能力，完成一份獨立研究報告。

3. 九年級

(1) 發現問題、資料蒐集、分析、統整、撰寫報告之經驗傳承。

(2) 根據獨立研究主題，培養高中科學班人才。

(四) 上課方式

1. 針對資優生的類別及特殊需要，將其學習經驗加以系統化組織。
2. 採分組教學，以安排適當的學習課程及活動，俾利資優生學習，獨立研究強調學生經由引導後，能根據自己的興趣，選擇研究主題，擬定研究計畫，並以適切的研究方法，進行資料蒐集、分析與解釋，以培養其獨立研究的能力。
3. 每週安排一節，邀請校內各領域教師指導資優生。
4. 安排兩次校外專家學者蒞校指導。
5. 配合校慶舉辦成果發表。

(五) 檢核機制

每位資優生必須完成獨立研究作品，並在期末進行成果報告，期間，校方也積極鼓勵資優生將其作品參與獨立研作競賽。

二、 學校如何提供該生獨立研究訓練

(一) 指導資優生訂定研究主題與資料蒐集

指導資優生從日常生活或各領域的學習內容中，覺察自己較感興趣的主題，接著訓練資優生自行訂定題目，與教師討論並確認題目後，著手進行資料蒐集與研讀討論資料內容。

(二) 指導資優生擬定研究架構與分析資料

首先引導資優生思考研究動機，進而訂出研究目的以及待答問題，並討論以何種研究法進行研究，最後歸納研究心得，並能將各項討論過程系統記錄。

(三) 指導資優生統整研究資料與撰寫報告

指導資優生能依獨立研究之摘要、主題、工作進度、研究問題、尋找資源、研究發現、擬定正式計畫及研究問

題、提出研究結果，以及對整個研究的評鑑與檢討，作一系統地撰寫，提出完整研究報告。

（四）提供行政支援

1. 場地支援

校方於每日課後或假日，提供教室、討論室、實驗室，協助研究團隊進行獨立研究。

2. 設備支援

因應獨立研究主題，提供必要實驗設備、模型與電腦等研究器材，以方便研究團隊進行獨立研究。

3. 經費支援

專款支付校外專家學者蒞校演講獨立研究相關主題之演講費與差旅費。

（五）對於普通班學生的協助

針對有興趣從事獨立研究但非就讀資優班的學生，師長和學校也都願意盡量提供前述的師資和行政上的相關資源，

盡力的協助和輔導學生從事相關的獨立研究，讓學生從發現問題、探究問題、批判思考，進而培養解決問題之能力。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機：

我們的研究動機是因為剛好聽到數學老師分享來自於 2024JHMC 數學競賽，第一部分競速賽第 3 題，該題最初公佈的答案為 53，但後來改為「此題送分」，引發我們的興趣，加上我們組員中也有同學參與了這次的競賽，對於這個題目更有深刻的感觸，進而讓我們決定探究該題出錯的原因並且嘗試修正題目，期待能找出它的各種關係。

該試題的原題目內容如下：「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平

均數多 4，則甲組的算術平均數為？」

我們原先也一樣算出答案為 53，但這題怎麼會送分呢？題目是哪裏出了問題？我們試著找出送分的原因，並嘗試更改題目讓它有解。為了探究其中的奧秘，展開了本次的數學探究。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

我們的研究希望能透過討論、試算和分析，期待能找到、並且延伸討論，進而得到下列問題的結果：

問題 1 (錯誤分析)：2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題，**究竟是哪裏出錯了？**

問題 2 (題目修改)：將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」**改為**「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 5，則甲組的算術平均數為？」

問題 3 (題目修改)：將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」**改為**「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 6，則甲組的算術平均數為？」

問題 4 (題目修改)：將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術

平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 a，且 a 為正整數，則甲、乙兩組的算術平均數的差值 a，可能有哪些？」

問題 5 (題目修改): 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數之差有哪些？」

問題 6 (題目修改): 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組(甲乙兩組個數不一定一樣多)，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」

問題 7 (個數影響): 接下來我們繼續討論將原題目改為甲、乙兩組個數不同時，例如：甲組的個數是 8、12、15、20、30 時，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值。

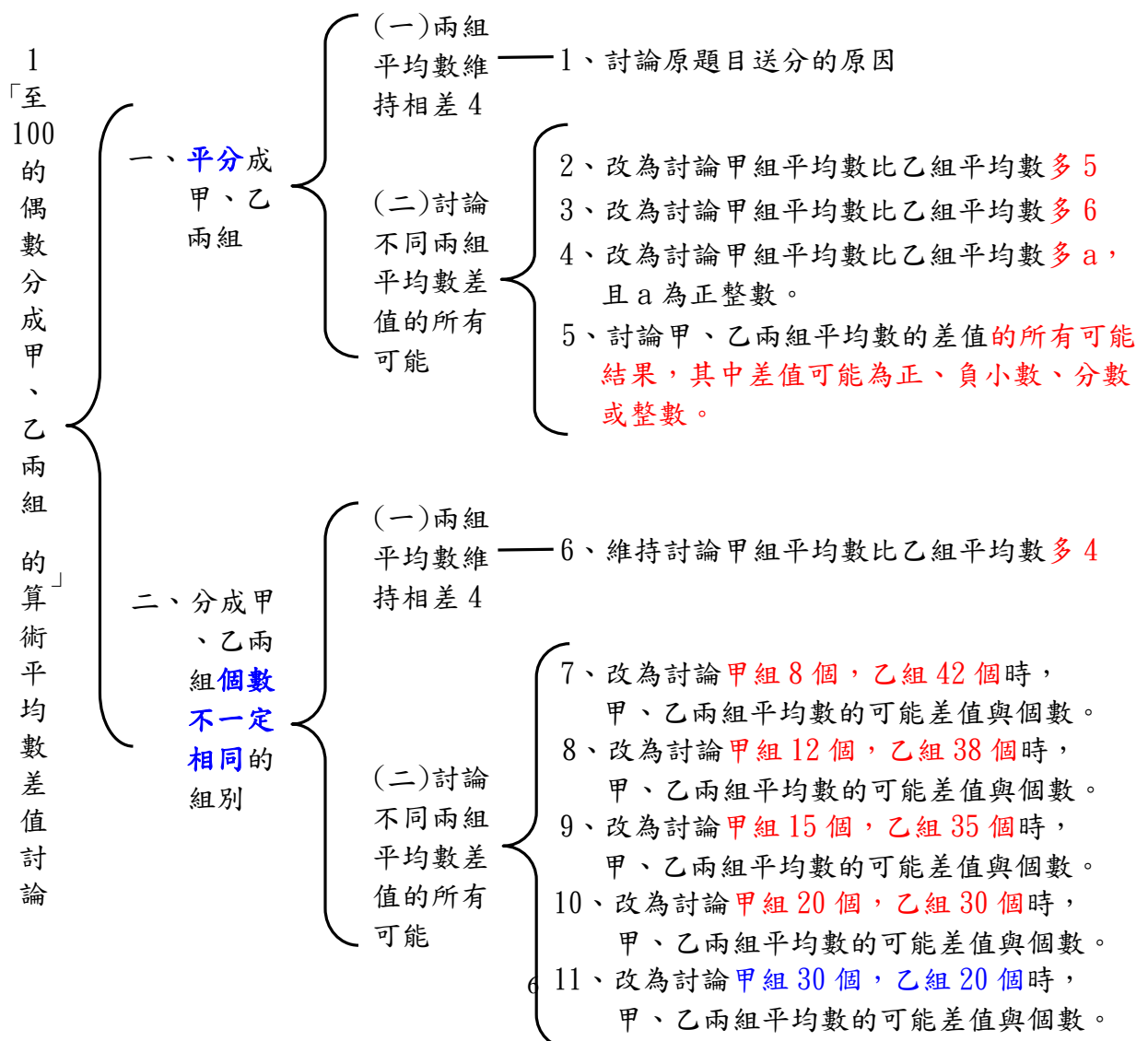
問題 8 (公式推導): 最後，我們期望能歸納出甲組個數為 n 個，乙組個數為 $(50-n)$ 個時，甲組算術平均數和乙組算術

平均數之差的可能值、可能值的公差和可能值的數量之公式，並進一步討論：在甲、乙各有多少個時，甲、乙兩組算術平均數之差的可能值會有最多種可能。

問題 9 (公式驗證)：最後，我們繼續利用問題 8 的結果公式，回過頭來驗證問題 5 的結果，確認問題 5 的推論是否有誤？

我們進一步的將我們所討論的問題之分析歷程和架構，簡單的整理條列呈現如下：

我們的問題之分析討論架構示意圖



◎我們的工作進度大致如下：

- (一) 第 1 週：2025 年 6 月 22 日~2025 年 6 月 28 日之進度為
確定研究方向與主題。
- (二) 第 2 週：2025 年 6 月 29 日~2025 年 7 月 5 日之進度為上網蒐集
相關資料與文獻探討。
- (三) 第 3 週：2025 年 7 月 6 日~2025 年 7 月 12 日之進度為複習連
續偶數的總和與平均值的算法，與計算機操作求
值。
- (四) 第 4 週：2025 年 7 月 13 日~2025 年 7 月 19 日之進度為學習
Excel 軟體介面與欄位、輸入介面和基本公式介
紹。
- (五) 第 5 週：2025 年 7 月 20 日~2025 年 7 月 26 日之進度為學習
Excel 軟體的求總和公式 sum 和平均 average 公式的
使用，並嘗試求出不同的甲乙兩組數值時，各組的總
和與算數平均數，再求得其算數平均數的差。
- (六) 第 6 週：2025 年 7 月 27 日~2025 年 8 月 2 日之進度為
改變題目：討論平分成甲乙兩組時，其平均數相差
的可能之結果與關係。
- (七) 第 7 週：2025 年 8 月 3 日~2025 年 8 月 9 日之進度為
改變題目：討論若分成甲乙兩組，但兩組數量不同
的情形下，兩組平均數相差的值與關係。
- (八) 第 8 週：2025 年 8 月 10 日~2025 年 8 月 16 日之進度為
繼續探討上週所得之二元一次方程式，在 $n < 50$ 的情
形下，可能之解。亦學習利用 Excel 來協助找出各種
不同 n 值時，對應算出的 $x+4$ 和 $n(x+4)$ 的值，並以表
格化來呈現，且判斷各組數值的合理。。
- (九) 第 9 週：2025 年 8 月 17 日~2025 年 8 月 23 日之進度為

討論：甲組 8 個，乙組 42 個時，以及在甲組 12 個，乙組 38 個時，其平均數相差的可能之最大、最小值，和差值之規律。

(十) 第 10 週：2025 年 8 月 24 日~2025 年 8 月 30 日之進度為

討論：甲組 15 個，乙組 35 個時，其平均數相差的可能之最大、最小值，和差值之規律。

(十一) 第 11 週：2025 年 8 月 31 日~2025 年 9 月 6 日之進度為

討論：甲組 20 個，乙組 30 個時，其平均數相差的可能之最大、最小值，和差值之規律。並與甲組 30 個，乙組 20 個時的結果比較。

(十二) 第 12 週：2025 年 9 月 7 日~2025 年 9 月 13 日之進度為

歸納出甲組個數為 n 個，乙組數量為 $(50-n)$ 個時，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值、可能值公差和個數，並用 Excel 計算討論在甲、乙各有多少個時，甲、乙兩組算術平均數之差的可能值會有最多種可能。

(十三) 第 13 週：2025 年 9 月 14 日~2025 年 9 月 20 日之進度為

彙整研究成果、撰寫獨立研究報告。

(十四) 第 14 週：2025 年 9 月 21 日~2025 年 9 月 27 日之進度為

評鑑、檢討、省思與收穫。

(十五) 期 末：2026 年 1 月 5 日~2026 年 1 月 9 日預計之進度為

校內成果發表。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	期末
形成研究問題	■	■													
文獻探討		■	■												
資料分析					■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

推導一般情形 結果	
撰寫研究報告	
校內成果發表	

工作進度甘特圖如下：

三、彙整相關文獻：

我們在暑假前決定做這相關問題的研究時，利用網路搜尋了許多資料，也針對「2024JHMC 試題解法」進行搜尋，但並無發現相關的研究報告。也查了許多科展作品，同樣並無相關的研究報告，也許我們是最早研究此問題的人。在參考網路上一些等差(比)數列的知識後，便著手本獨立研究，尋求出新數列並找出其公差(比)。

四、資料分析：

1. 探討原始題目：「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」**這題會送分的原因。**

【解】∵「2、4、6、8、10、…、98、100」這 50 個偶數總平均為

$$(2+4+6+8+10+\cdots+100)\div 50 = 2550\div 50 = 51$$

又平分成甲乙兩組，且甲組的算術平均數較乙組多 4，

而 $4\div 2 = 2$ ∴甲組的算術平均數應為 $51+2 = 53$

∴甲組的總和= $53 \times 25 = 1325$

但甲組的總和=25 個偶數之和，不可能為奇數 => 矛盾

∴此題無解。

2. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數**多 4**，則甲組的算術平均數為？」**改為**「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數**多**

5，則甲組的算術平均數為？」

【解】設甲組的算數平均數為 $(m+5)$ ，乙組算數平均數為 m

$$\therefore 25(m+5)+25m = 2550 \quad \text{則 } m = 48.5$$

$\Rightarrow$ 此時甲組的算數平均數為 53.5

$\Rightarrow$ 甲組的總和 $= 53.5 \times 25 = 1337.5$ (矛盾) $\therefore$ 此題亦無

解。

3. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題將「2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100」這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 6，則甲組的算術平均數為？」

【解】 $\therefore$ 「2、4、6、8、10、 $\dots$ 、98、100」這 50 個偶數總平均為

$$(2+4+6+8+10+\dots+98+100) \div 50 = 2550 \div 50 = 51$$

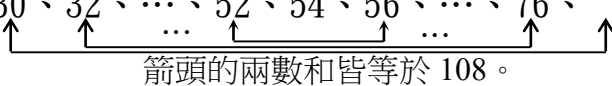
又平分成甲乙兩組，且甲組的算術平均數較乙組多 6，

$$\text{而 } 6 \div 2 = 3$$

$\therefore$ 甲組的算術平均數應為 $51+3 = 54$ ，

乙組算數平均數則應為 $51-3 = 48$

$\therefore$ 甲組的總和 $= 54 \times 25 = 1350$ ，乙組的總和 $= 48 \times 25 = 1200$

我們找到若甲數為「30、32、 $\dots$ 、52、54、56、 $\dots$ 、76、78」


這 25 個偶數的算數平均數恰為 $(30+32+\dots+76+78) \div 25 = 54$

$\Rightarrow$ 符合！

故當甲組的算數平均數為 54 時，甲組的算術平均數會比乙組的算術平均數多 6，無誤！

4. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」**改為**「將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 a，且 a 為正整數，則甲、乙兩組的算術平均數的差值 a，**可能有哪些？**」

【解】 設甲組的算數平均數為 $(m+a)$ ，乙組的算數平均數為 m

$$\therefore 25(m+a)+25m = 2550$$

$$\therefore (m+a)+m = 102$$

$$2m+a = 102$$

$$m = \frac{102-a}{2}$$

$$m = 51 - \frac{a}{2}$$

$\therefore$ 乙組為 25 個偶數 $\Rightarrow$ 乙組的總和 $= 25m$ 必為偶數

故 m 必亦須為偶數 $\Rightarrow$ 即 $m = 51 - \frac{a}{2}$ 為偶數 $\Rightarrow \frac{a}{2}$ 為奇數

$\therefore$ 設 $\frac{a}{2} = 2k-1$ (其中 k 為正整數)

$\therefore a = 4k-2 \Rightarrow$ 即 a 可能的正整數值為 2 或 6 或 10 或…

又乙組的算數平均數 m 的最小值為 $(2+4+\cdots+48+50)\div 25 = 26$

而此時 $26 = 51 - \frac{a}{2}$ ，可得 $a = 50$ ，即 a 的最大值為 50

$\therefore a$ 可能的正整數值為 2 或 6 或 10 或…或 50，形成公差為 4 的等差數列

且此時算術平均數之差的可能正整數值 a ，共有

$$(50-2)\div 4 + 1 = 12+1 = 13 \text{ 種可能。}$$

註：我們將於稍後第 5 點的討論時，驗證這 13 種可能之值無誤。

5. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」
修正成「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均之差有哪些可能結果？」來討論。

【解】(1)先求二組算術平均數之差的最大值：

$$\because \text{甲組的總和最大為 } 52+54+56+\dots+98+100 = 1900$$

$$\therefore \text{此時甲組算術平均數為 } 1900 \div 25 = 76$$

$$\text{而乙組的總和為 } 2550 - 1900 = 650$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 650 \div 25 = 26$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 } 76 - 26 = 50$$

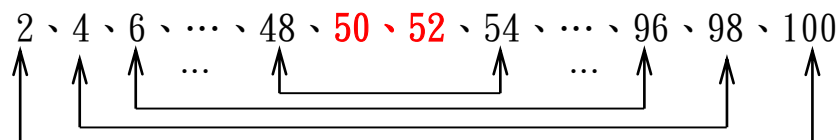
(2)再求二組算術平均數之差的絕對值的最小值：

① $\because$ 50 個偶數的和的一半 $= 2550 \div 2 = 1275$ 是奇數

又甲組、乙組均為 25 個偶數之和，不可得 1275 這個奇數

$\therefore$ 二組算術平均數之差不可能為 0。

②我們發現 1~100 的 50 個偶數中，



箭頭的兩數和皆等於 102。不含 50、52，共有 24 組

亦即 $2+100 = 4+98 = \dots = 48+54 = 102$ ，共有 24 組

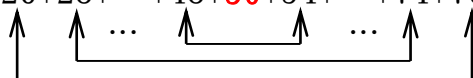
若將這 24 組數值平分至甲、乙兩組(即各取 12 組)

再搭配將 50 和 52 兩數各別分配至甲、乙其中一組中，

則此時甲、乙兩組的總和差距將最小，平均數差值會較小

例如：若甲組= $\{26、28、\cdots、48、50、54、\cdots、74、76\}$

則甲組總和= $26+28+\cdots+48+50+54+\cdots+74+76 = 1274$



$\therefore$ 甲組算術平均數為 $1274 \div 25 = 50.96$

又此時乙組的總和為 $2550 - 1274 = 1276$

$\Rightarrow$ 乙組算術平均數為 $1276 \div 25 = 51.04$

$\therefore |50.96 - 51.04| = 0.08$ 這是 甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的絕對值之最小值。

(3) $\therefore$ 甲組總和的最小值為 $2+4+6+\cdots+46+48+50 = 650$

$\therefore$ 甲組算數平均數= $650 \div 25 = 26$

又此時乙組的總和為 $2550 - 650 = 1900$

即乙組算數平均數= $1900 \div 25 = 76$

$\therefore 26 - 76 = -50$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 50

(4) $\therefore$ 甲組總和的第二小值為 $2+4+6+\cdots+46+48+52 = 652$

$\therefore$ 甲組算術平均數為 $652 \div 25 = 26.08$

又此時乙組的總和為 $2550 - 652 = 1898$

即乙組算術平均數為 $1898 \div 25 = 75.92$

$\therefore 26.08 - 75.92 = -49.84$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 49.84

(5) $\therefore$ 甲組總和第三小值為 $2+4+6+\cdots+46+48+54 = 654$

$\therefore$ 此時甲組算術平均數為 $654 \div 25 = 26.16$

又此時乙組的總和為 $2550 - 654 = 1896$

即乙組算術平均數為 $1896 \div 25 = 75.84$

$\therefore 26.16 - 75.84 = -49.68$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 49.68

(6) 經上面的討論，我們發現：

甲組的總和每次增加 2，則平均增加 0.08
 乙組的總和每次減少 2，則平均減少 0.08
 故兩組算術平均之差每次將會增加 $0.08 - (-0.08) =$

0.16

(7)結論 1：當甲組、乙組的個數皆為 25 個時，這兩組算術平均數之差由小到大排列可得：

-50、-49.84、-49.68、...、49.84、50

=>即成首項-50，末項 50，公差為 0.16 的等差數

列

且此時算術平均數之差，共有

$[50 - (-50)] \div 0.16 + 1 = 625 + 1 = 626$ 種可能。

結論 2：在上述結論 1 的 626 種結果中，我們整理出了：

項數	甲、乙兩組 平均的差值 a	項數	甲、乙兩組 平均的差值 a	項數	甲、乙兩組 平均的差值 a
326	2	451	22	576	42
351	6	476	26	601	46
376	10	501	30	626	50
401	14	526	34		
426	18	551	38		

因此，我們也驗證了前述資料分析 4 的結論：

「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，則甲組的算術平均數與乙組算術平均數多 a，且 a 為正整數，則甲、乙兩組的算術平均數的可能的正整數差值 a，共有 13 種可能。」

6. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組(甲乙兩組個數不一定一樣多)，若已知甲組的算術平均數較

乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」來討論。

【解】設甲組內有 n 個偶數，這 n 個偶數的算術平均數為 $x+4$ ，

$n \in N$

則乙組內有 $(50-n)$ 個偶數，這 $(50-n)$ 個偶數算術平均數為 x 。

$$\therefore nx(x+4) + (50-n)x = 2550$$

$$\therefore nx + 4n + 50x - nx = 2550$$

$$4n + 50x = 2550$$

$$\therefore 2n + 25x = 1275$$

又 $\therefore n$ 是正整數， $n < 50$ 且 $n(x+4)$ 是偶數

我們透過 Excel 的協助來計算，並列出甲組的個數、算數平均數以及甲組總和的關係如下：

甲組 個數 n	甲組 平均 $x+4$	甲組總和 $n(x+4)$	甲組 個數 n	甲組 平均 $x+4$	甲組總和 $n(x+4)$	甲組 個數 n	甲組 平均 $x+4$	甲組總和 $n(x+4)$	甲組 個數 n	甲組 平均 $x+4$	甲組總和 $n(x+4)$
1	54.92	54.92	14	53.88	754.32	27	52.84	1426.68	40	51.8	2072
2	54.84	109.68	15	53.8	807	28	52.76	1477.28	41	51.72	2120.52
3	54.76	164.28	16	53.72	859.52	29	52.68	1527.72	42	51.64	2168.88
4	54.68	218.72	17	53.64	911.88	30	52.6	1578	43	51.56	2217.08
5	54.6	273	18	53.56	964.08	31	52.52	1628.12	44	51.48	2265.12
6	54.52	327.12	19	53.48	1016.12	32	52.44	1678.08	45	51.4	2313
7	54.44	381.08	20	53.4	1068	33	52.36	1727.88	46	51.32	2360.72
8	54.36	434.88	21	53.32	1119.72	34	52.28	1777.52	47	51.24	2408.28
9	54.28	488.52	22	53.24	1171.28	35	52.2	1827	48	51.16	2455.68
10	54.2	542	23	53.16	1222.68	36	52.12	1876.32	49	51.08	2502.92
11	54.12	595.32	24	53.08	1273.92	37	52.04	1925.48			
12	54.04	648.48	25	53	1325	38	51.96	1974.48			
13	53.96	701.48	26	52.92	1375.92	39	51.88	2023.32			

$\therefore$ 解出 n 與 $x+4$ 可得 $(n, x+4) = (10, 54.2)$ 、 $(20, 53.4)$ 、

$(30, 52.6)$ 、 $(40, 51.8)$ 四組答案。

亦即， $\left\{ \begin{array}{l} \text{甲組個數為 10 時，平均為 54.2（此時，乙組有 40 個）} \\ \text{甲組個數為 20 時，平均為 53.4（此時，乙組有 30 個）} \end{array} \right.$

甲組個數為 30 時，平均為 52.6（此時，乙組有 20

個)

甲組個數為 40 時，平均為 51.8 (此時, 乙組有 10

個)

7. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成不同個數的甲、乙兩組，甲組的個數是 8、乙組的個數是 42，

甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值？」

【解】(1) ∵ 甲組總和最小值為 $2+4+6+\cdots+12+14+16 = 72$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 72 \div 8 = 9$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 72 = 2478$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2478 \div 42 = 59$$

$$\therefore 9 - 59 = -50$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 50$$

(2) ∵ 甲組總和的第二小值為 $2+4+6+\cdots+12+14+18 = 74$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 74 \div 8 = 9.25$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 74 = 2476$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2476 \div 42 = 58\frac{20}{21}$$

$$\therefore 9.25 - 58\frac{20}{21} = -49\frac{59}{84}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{59}{84}$$

(3) ∵ 甲組總和的第三小值為 $2+4+6+\cdots+12+14+20 = 76$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 76 \div 8 = 9.5$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 76 = 2474$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2474 \div 42 = 58\frac{19}{21}$$

$$\therefore 9.5 - 58\frac{19}{21} = -49\frac{17}{42}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{17}{42}$$

(4)由上面的討論我們發現：甲組的總和每次增加 2，則其算數平均數每次將增加 $2 \div 8 = 0.25$ 。且乙組的總和每次減少 2，則其算數平均數每次減少 $\frac{2}{42} = \frac{1}{21}$ ，故兩組算術平均數

$$\text{之差，每次將會增加 } 0.25 - (-\frac{1}{21}) = \frac{25}{84}。$$

(5)結論：當甲組的個數為 8，此時乙組的個數為 42，這兩組算術平均數之差由小到大排列可得：

$$-50、-49\frac{59}{84}、-49\frac{17}{42}、\dots、49\frac{59}{84}、50$$

$$\Rightarrow \text{即成首項}-50，\text{末項 } 50，\text{公差 } \frac{25}{84} \text{ 的等差數列。}$$

且此時算術平均數之差，共有

$$[50 - (-50)] \div \frac{25}{84} + 1 = 336 + 1 = 337 \text{ 種可能。}$$

8. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組，甲組的個數是 12、乙組的個數是 38，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值？」

【解】(1) $\therefore$ 甲組總和最小值為 $2+4+6+\dots+20+22+24 = 156$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 156 \div 12 = 13$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 156 = 2394$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2394 \div 38 = 63$$

$$\therefore 13-63 = -50$$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 50

$$(2) \therefore \text{甲組總和的第二小值為 } 2+4+6+\cdots+20+22+\textcolor{red}{26} = 158$$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 158 \div 12 = 13\frac{1}{6}$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550-158 = 2392$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2392 \div 38 = 62\frac{18}{19}$$

$$\therefore 13\frac{1}{6} - 62\frac{18}{19} = -49\frac{89}{114}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{89}{114}$$

$$(3) \therefore \text{甲組總和的第三小值為 } 2+4+6+\cdots+20+22+\textcolor{red}{28} = 160$$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 160 \div 12 = 13\frac{1}{3}$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550-160 = 2390$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2390 \div 38 = 62\frac{17}{19}$$

$$\therefore 13\frac{1}{3} - 62\frac{17}{19} = -49\frac{32}{57}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{32}{57}$$

(4) 由上面的討論我們發現：甲組的總和每次增加 2，則其算

$$\text{數平均數每次將增加 } 2 \div 12 = \frac{1}{6} \text{。}$$

且乙組的總和每次減少 2，則其算數平均數每次減少

$$\frac{2}{38} = \frac{1}{19},$$

$$\text{故兩組算術平均數之差，每次將會增加 } \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{19}\right) = \frac{25}{114} \text{。}$$

(5) **結論：** 當甲組的個數為 12，此時乙組的個數為 38，這兩組算術平均數之差由小到大排列可得：

$$-50、-49\frac{89}{114}、-49\frac{32}{57}、\dots、49\frac{89}{114}、50$$

=>即成首項-50，末項 50，公差 $\frac{25}{114}$ 的等差數列。

且此時算術平均數之差，共有

$$[50 - (-50)] \div \frac{25}{114} + 1 = 456 + 1 = 457 \text{ 種可能。}$$

9. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、 $\dots$ 、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組，甲組的個數是 15、乙組的個數是 35，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值？」

【解】(1) $\because$ 甲組總和最小值為 $2+4+6+\dots+26+28+30 = 240$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 240 \div 15 = 16$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 240 = 2310$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2310 \div 35 = 66$$

$$\therefore 16 - 66 = -50$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 50$$

(2) $\because$ 甲組總和的第二小值為 $2+4+6+\dots+26+28+32 = 242$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 242 \div 15 = 16\frac{2}{15}$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 242 = 2308$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2308 \div 35 = 65\frac{33}{35}$$

$$\therefore 16\frac{2}{15} - 65\frac{33}{35} = -49\frac{17}{21}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{17}{21}$$

(3) $\because$ 甲組總和的第三小值為 $2+4+6+\dots+26+28+34 = 244$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 244 \div 15 = 16\frac{4}{15}$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 244 = 2306$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 2306 \div 35 = 65\frac{31}{35}$$

$$\therefore 16\frac{4}{15} - 65\frac{31}{35} = -49\frac{13}{21}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{13}{21}$$

(4) 由上述討論可發現：甲組的總和每次增加 2，平均會增加 $\frac{2}{15}$

乙組的總和每次減少 2，平均會減少 $\frac{2}{35}$

$$\text{故兩組算術平均數之差每次會增加 } \frac{2}{15} - \left(-\frac{2}{35}\right) = \frac{4}{21}$$

(5) 結論：當甲組的個數為 15，此時乙組的個數為 35，這兩

組 算術平均數之差，由小到大排列可得：

$$-50, -49\frac{17}{21}, -49\frac{13}{21}, \dots, 49\frac{17}{21}, 50$$

=> 即成首項 -50，末項 50，公差 $\frac{4}{21}$ 的等差數列。

且此時算術平均數之差，共有

$$[50 - (-50)] \div \frac{4}{21} + 1 = 525 + 1 = 526 \text{ 種可能。}$$

10. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組，甲組的個數是 20、乙組的個數是 30，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值？」

【解】(1) $\therefore$ 甲組總和最小值為 $2+4+6+\dots+36+38+40 = 420$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 420 \div 20 = 21$$

又此時乙組的總和為 $2550-420 = 2130$

$\therefore$ 乙組算術平均數為 $2130 \div 30 = 71$

$\therefore 21-71 = -50$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 50

(2) $\therefore$ 甲組總和第三小值為 $2+4+6+\cdots+36+38+42 = 422$

$\therefore$ 甲組算術平均數為 $422 \div 20 = 21.1$

又此時乙組的總和為 $2550-422 = 2128$

$\therefore$ 乙組算術平均數為 $2128 \div 30 = 70\frac{14}{15}$

$\therefore 21.1 - 70\frac{14}{15} = -49\frac{5}{6}$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 $49\frac{5}{6}$

(3) $\therefore$ 甲組總和第三小值為 $2+4+6+\cdots+36+38+44 = 424$

$\therefore$ 甲組算術平均數為 $424 \div 20 = 21.2$

又此時乙組的總和為 $2550-424 = 2126$

$\therefore$ 乙組算術平均數為 $2126 \div 30 = 70\frac{13}{15}$

$\therefore 21.2 - 70\frac{13}{15} = -49\frac{2}{3}$

$\therefore$ 甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 $49\frac{2}{3} = 49\frac{4}{6}$

(4) 由上述討論可發現：甲組的總和每次增加 2，算術平均數每次會增加 0.1。

乙組的總和每次減少 2，算數平均數每次會減少 $\frac{1}{15}$ ，

故兩組算術平均數之差，每次增加 $0.1 - (-\frac{1}{15}) = \frac{1}{6}$ 。

(5) 結論：當甲組的個數為 20，此時乙組的個數為 30，這兩組算術平均數之差由小到大排列可得：

$$-50、-49\frac{5}{6}、-49\frac{4}{6}、\dots、49\frac{5}{6}、50$$

=>即成首項-50，末項 50，公差 $\frac{1}{6}$ 的等差數列。

且此時算術平均數之差，共有

$$[50 - (-50)] \div \frac{1}{6} + 1 = 600 + 1 = 601 \text{ 種可能。}$$

11. 將 2024JHMC 數學競賽競速賽第 3 題試題「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，若已知甲組的算術平均數較乙組算術平均數多 4，則甲組的算術平均數為？」改為「將 2、4、6、8、10、...、100 這 50 個正偶數分成甲、乙兩組，甲組的個數是 30、乙組的個數是 20，甲組算術平均數和乙組算術平均數之差的可能值？」

【解】(1) ∵ 甲組總和最小值為 $2+4+6+\dots+56+58+60 = 930$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 930 \div 30 = 31$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 930 = 1620$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 1620 \div 20 = 81$$

$$\therefore 31 - 81 = -50$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 50$$

(2) ∵ 甲組總和第二小值為 $2+4+6+\dots+56+58+62 = 932$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 932 \div 30 = 31\frac{1}{15}$$

$$\text{又此時乙組的總和為 } 2550 - 932 = 1618$$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 1618 \div 20 = 80.9$$

$$\therefore 31\frac{1}{15} - 80.9 = -49\frac{5}{6}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{5}{6}$$

(3) $\therefore$ 甲組總和第三小值為 $2+4+6+\cdots+56+58+64 = 934$

$$\therefore \text{甲組算術平均數為 } 934 \div 30 = 31\frac{2}{15}$$

又此時乙組的總和為 $2550-934 = 1616$

$$\therefore \text{乙組算術平均數為 } 1616 \div 20 = 80.8$$

$$\therefore 31\frac{2}{15} - 80.8 = -49\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{甲組的算術平均數較乙組算術平均數少 } 49\frac{2}{3} = 49\frac{4}{6}$$

(4) 由上述討論可發現：甲組的總和每次增加 2，平均會增加 $\frac{1}{15}$

乙組的總和每次減少 2 平均減少 0.1，

$$\text{故兩組算術平均數之差每次增加 } \frac{1}{15} - (-0.1) = \frac{1}{6}。$$

(5) 結論：當甲組的個數為 30，此時乙組的個數為 20，這兩組算術平均數之差由小到大排列可得：

$$-50、-49\frac{5}{6}、-49\frac{4}{6}、\dots、49\frac{5}{6}、50$$

$\Rightarrow$ 即成首項 -50，末項 50，公差 $\frac{1}{6}$ 的等差數列。

且此時算術平均數之差，共有

$$[50 - (-50)] \div \frac{1}{6} + 1 = 600 + 1 = 601 \text{ 種可能。}$$

從上面的討論，我們發現甲組個數是 20 個時，和甲組個數是 30 個時，甲組和乙組算術平均數差所形成的等差數列由小而大排列後會是一樣的。這很簡單就可推出，因為當甲組個數 20 個時，乙組個數是 30 個，而若甲組個數 30 個時，則乙組個數將會是 20 個，這等於將兩組互換而已。

同理，甲組個數是 35 個時會和甲組個數 15 個時，甲組和乙組算術平均數差所形成的等差數列由小而大排列後會是一樣的；甲組個數

是 38 個時也會和甲組個數是 12 個時，甲組和乙組算術平均數差所形成的等差數列由小而大排列後也會是一樣的；甲組個數是 42 個時也會和甲組個數是 8 個時，甲組和乙組算術平均數差所形成的等差數列由小而大排列後也會是一樣的；依此類推。

五、研究結果與討論

結論 1：當甲組的個數為 n ，此時乙組的個數為 $(50-n)$ ，若我們定義甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可能值由小至大排列的結果為數列 $\langle A_n \rangle$ ，亦即：

當 $n=1$ 時，所得的數列記為 $\langle A_1 \rangle$

當 $n=2$ 時，所得的數列記為 $\langle A_2 \rangle$

⋮

當 $n=49$ 時，所得的數列記為 $\langle A_{49} \rangle$

則我們將可得 $\langle A_n \rangle = \langle A_{50-n} \rangle$

亦即 $n=k$ 時和 $n=50-k$ 時（其中 $1 \leq k \leq 49$ ，且 k 為整數），

則兩者之數列由小至大排列後會相同。

證明：這是顯而易見的。

結論 2：若將 2、4、6、8、10、…、100 這 50 個正偶數平分成甲、乙兩組，且甲組的算術平均數比乙組算術平均數多 a ，且 a 為正整數，則甲、乙兩組的算術平均數的差值 a ，將為 2、6、10、…、50，形成公差為 4 的等差數列，且 a 值有 13 種可能。

證明：∵ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\therefore 50 = 2 + (n-1) \times 4$$

$$4(n-1) = 48$$

$$n-1 = 12$$

$$n = 13$$

結論 3：當甲組的個數為**偶數個**時，此時乙組的個數也會是**偶數個**，則甲組算術平均數與乙組算術平均數的差之最小值的絕對值為 0。

證明：將 2、4、6、8、…、100 這 50 個偶數分成 (2, 100)、(4, 98)、(6, 96)、…、(50, 52) 25 組。

∴ 這 25 組中的每一組中的兩數之平均值皆為 51

∴ 若甲組的數是由這 25 組任**取其中幾組組成偶數個**來當甲組的數值，則甲組數的算術平均數為 51，

同理乙組的算術平均數也為 51。

可得其相差之結果為 $51 - 51 = 0$

結論 4：若甲組的個數為奇數個時，此時乙組的個數也會是奇數個，則甲組算術平均數與乙組算術平均數的差之最小值將不會是 0。

證明：設甲組有 a 個偶數，乙組有 $(50-a)$ 個偶數（其中 a 為奇數）

且設其算數平均數皆為 x

$$\therefore ax + (50-a)x = 2550$$

$$50x = 2550$$

$$x = 51$$

但此時甲組數的總和 = $ax = 51a$ 為奇數 $\Rightarrow$ 矛盾

∴ 甲組算術平均數與乙組算術平均數的差之最小值將不會是 0

結論 5：不論甲組的個數是取**奇數個**或**偶數個**，則甲組算術平均數與乙組算術平均數的差之最小值為 -50；而且，甲組算術平均數與乙組算術平均數的差之最大值為 50。

證明：設甲組有 n 個數，

則甲組之和的最小值為 $2+4+6+\cdots+2n = \frac{n \times (2+2n)}{2} = n+n^2$

此時甲組的算術平均數為 $\frac{n+n^2}{n} = 1+n$

又乙組的總和為 $2550-n-n^2 = (51+n)(50-n)$

$\therefore$ 此時乙組算術平均數為 $\frac{(51+n)(50-n)}{50-n} = 51+n$

可得其平均相差之結果為 $(1+n)-(51+n) = -50$

同理，若改為設乙組有 n 個時，依類似上述的方法來推論，則此時將變成甲、乙兩組之平均相差的最大值為 50。

結論 6：當甲組的個數為 n 時，乙組的個數為 $(50-n)$ ，甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可能值，由小至大排列可形成首項-50，末項 50，公差為 $\frac{100}{n(50-n)}$ 的等差數列。

證明：由結論 5 可知：甲組算術平均數減乙組算術平均數的最小值與最大值分別為-50 與 50。

而 $\therefore$ 甲組總和的第二小值 = $2+4+6+\cdots+(2n-2)+(2n+2)$
$$= \frac{[2+(2n-2)] \times (n-1)}{2} + (2n+2)$$

$$= n^2 + n + 2$$

$\therefore$ 甲組算數平均數 = $\frac{n^2 + n + 2}{n} = n + 1 + \frac{2}{n}$ ，

$\Rightarrow$ 比甲組算數平均數最小時，增加 $(n + 1 + \frac{2}{n}) - (1 + n) = \frac{2}{n}$

又此時乙組總和的第二大值 = $2550 - (n^2 + n + 2)$

$\therefore$ 乙組算數平均數 = $\frac{2550 - (n^2 + n + 2)}{50 - n}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2550 - n - n^2) - 2}{50 - n} \\
&= \frac{(50 - n)(51 + n) - 2}{50 - n} \\
&= 51 + n - \frac{2}{50 - n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{比乙組算數平均數最大時，減少 } (51 + n) - (51 + n - \frac{2}{50 - n}) \\
&= \frac{2}{50 - n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{公差} &= \frac{2}{n} - (-\frac{2}{50 - n}) \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2}{50 - n} \\
&= \frac{2(50 - n) + 2n}{n(50 - n)} \\
&= \frac{100 - 2n + 2n}{n(50 - n)} \\
&= \frac{100}{n(50 - n)}
\end{aligned}$$

結論 7：當甲組的個數為 n 時，乙組的個數為 $(50 - n)$ ，甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可能值，除了由小至大排列可形成首項 -50 ，末項 50 ，公差為 $\frac{100}{n(50 - n)}$ 的等差數列之

外，

它共有 $n(50 - n) + 1$ 種可能的值。

證明： $\because a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\therefore n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \quad \text{即} \quad n = (a_n - a_1) \div d + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore n &= [50 - (-50)] \div \frac{100}{n(50-n)} + 1 \\ &= 100 \times \frac{n(50-n)}{100} + 1 \\ &= n(50-n) + 1 \end{aligned}$$

故甲、乙兩組算術平均數之差，共有 $n(50-n)+1$ 種的可能值

結論 8: 進一步的討論結論 7 的 $n(50-n)+1$ 可能值之結果，我們發現：

甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可能值的數量，在 $n=25$ 時，也就是甲、乙兩組皆有 25 個時，將會有最多種的可能值。

討論：我們繼續透過 Excel 程式來幫我們整理甲組、乙組在不同個數時，它們算術平均數之差值的可能結果的數量，可得：

甲組 個數 n	乙組 個數 50-n	平均數差值 可能之數量 $n(50-n)+1$	甲組 個數 n	乙組 個數 50-n	平均數差值 可能之數量 $n(50-n)+1$	甲組 個數 n	乙組 個數 50-n	平均數差值 可能之數量 $n(50-n)+1$	甲組 個數 n	乙組 個數 50-n	平均數差值 可能之數量 $n(50-n)+1$
1	49	50	14	36	505	27	23	622	40	10	401
2	48	97	15	35	526	28	22	617	41	9	370
3	47	142	16	34	545	29	21	610	42	8	337
4	46	185	17	33	562	30	20	601	43	7	302
5	45	226	18	32	577	31	19	590	44	6	265
6	44	265	19	31	590	32	18	577	45	5	226
7	43	302	20	30	601	33	17	562	46	4	185
8	42	337	21	29	610	34	16	545	47	3	142
9	41	370	22	28	617	35	15	526	48	2	97
10	40	401	23	27	622	36	14	505	49	1	50
11	39	430	24	26	625	37	13	482			
12	38	457	25	25	626	38	12	457			
13	37	482	26	24	625	39	11	430			

可以發現：當甲組的個數為 25，乙組的個數為 25 個時，甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的可能值為 626 最多。

亦即：當甲組的個數為 n 時，乙組的個數為 $(50-n)$ 時，甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可能值的數量，在 $n=25$ 時，將會有最多種的可能值。

結論 9：我們繼續將結論 7的結果公式，回推回去一開始：50 個偶數

平分成甲、乙兩組(即 $n=25$ ，**甲組 25 個、乙組也 25 個**)時，

我們發現甲組算術平均數與乙組算術平均數之差的所有可

能值所形成的等差數列之**公差為** $\frac{100}{25 \times 25} = 0.16$ ，且甲、乙

兩組算術平均數之差**共有** $25 \times 25 + 1 = 626$ **種可能值**。

這個結果與前面 四、資料分析的第 5 點 所得之**結果**
相同，驗證了我們前面的**推論無誤**。

六、評鑑與檢討：上述每一階段的省思與收穫

(一) 尋找研究動機的出發點

1. 發覺問題：

因為這是我們第一次學習做數學獨立研究，對於可以研究題目有許多不了解的地方，我們從各屆的科展作品找尋靈感，但全國科展的作品有一定的難度，我們幾乎都看不懂，進一步找歷屆獨立研究的作品，結果也都是如此，況且這些作品似乎要用很多數學知識，我們找了很久，但都找不到可以做為研究的題目。

2. 解決方法：

老師建議我們可從歷屆的國中或國小組的科展與獨立研究中去下手，也可從各種中學生的數學競賽試題中找尋靈感。

3. 心得收穫：

多虧老師的建議，也感謝老師分享了這個題目，加上我們組員中有同學也親身參與這次 JHMC 的競賽，對這個题目的感觸特別的深刻，因而讓我們順利的在 JHMC 競賽 2024 年的試題中找到我們要研究的主題，也讓我們有了一個可以探究的問題與方向。

(二) 整理資料與資料分析

1. 發覺問題：

解二元一次方程式：「 $2n+25x = 1275$ ，其中 n 是正整數， $n < 50$ 且 $n \times (x+4)$ 是偶數」。這是二元一次方程式，雖然此方程式有「 $n < 50$ 且 $n \times (x+4)$ 是偶數」這兩個條件，答案應有有限組，但要求得其符答的解，似乎相當費時；

同樣的，要討論 $n(50-n)+1$ 的可能值結果，這對目前尚未學到二次函數的最大、最小值判斷的我們，也似乎有點難度。

2. 解決方法：

用 Excel 軟體幫忙，將 n 的值用 1~49 代入求出 x 值，並檢查哪些答案的 $n \times (x+4)$ 的值是否合理，相當的快速與便利。在第 1 次的設定時，因為程式不熟，跑出了錯誤了結果，所幸老師及時的提醒與指導，才算得了正確的值來讓我們判斷是否合理。

也因而之後在設定 $n(50-n)+1$ 的可能結果值時，就變得相當的順手，也很快就找出了在 $n=25$ 時，會有最多種可能的甲、乙組算數平均數的差值。

3. 心得收穫：

多運用科技可以幫助我們在處理事情上能更有效率。在做任何事前，先思索有什麼提高正確率與增加效率的方法，先規劃好，才不會花太多時間在補救上。

4. 未來展望：

因為時間的關係，我們只探討了 100 以下的 50 個偶數分成二組，這二組算術平均數之差的情形，未來可討論 2、4、6、8、10、...、98 共 49 個偶數分成二組的情況；或是討論 2、4、6、8、10、...、96 共 48 個偶數分成二組的情況... 等等來討論。

也可改討論 100 以下的 50 個奇數分成二組，這二組算算平均數之差的情形，以及它與這次討論的偶數之情形是否有類似的關係或公式。

或是也可討論 2、4、6、8、10、…、98、100 共 50 個偶數分成甲、乙、丙三組的情況。甚至可探討甲、乙二組的中位數、四分位數、百分位數等其它統計量數的關係。

這次研究讓我們體會到：數學探究不僅僅是計算，更重要的是思考問題本質、驗證結果的合理性，以及善用科技工具來輔助的重要。未來希望能嘗試更高階的統計分析，如變異數、標準差等，來探求其間的關係。

七、參考資料：

1. 九九文教基金會 2024 年第 22 屆 JHMC 數學競試競速賽試題答案：

https://www.99cef.org.tw/news_02.php?id=1132

2. 國中數學南一版第 4 冊第 1 章「數列與等差級數」。
3. 國中數學南一版第 2 冊第 1 章「二元一次方程式」。
4. 國中數學南一版第 3 冊第 1 章「乘法公式」。