

# 質數×幻方

探索質數幻方之奧妙

# 研究動機

遇到了有關主題的問題，覺得很有趣，將它研究。



# 研究目的

- 探討質數幻方的解法。
- 探討質數與幻方間的規律。
- 運用Excel找出質數幻方的解。

# 研究過程





# 文獻探討

第52屆中小學科展  
《找尋三階質數魔  
方陣》中，可將質  
數分類成 $3k+1$ 及  
 $3k-1$ 。

| 質數 | k  |
|----|----|
| 7  | 2  |
| 13 | 4  |
| 19 | 6  |
| 31 | 10 |
| 37 | 12 |
| 43 | 14 |
| 61 | 20 |

$3K+1$

| 質數 | k  |
|----|----|
| 2  | 1  |
| 5  | 2  |
| 11 | 4  |
| 17 | 6  |
| 23 | 8  |
| 29 | 10 |
| 41 | 14 |

$3K-1$

# 研究歷程

1. 中心為59的質數幻方：

|     |     |    |
|-----|-----|----|
| 101 | 5   | 71 |
| 29  | 59  | 89 |
| 47  | 113 | 17 |

(1) 找出四組等差數列：

| 第一項 | 第二項 | 第三項 | 公差 |
|-----|-----|-----|----|
| 47  | 59  | 71  | 12 |
| 29  | 59  | 89  | 30 |
| 17  | 59  | 101 | 42 |
| 5   | 59  | 113 | 54 |

(2) 轉為加減公差的形式：

|         |         |         |
|---------|---------|---------|
| $59+42$ | $59-54$ | $59+12$ |
| $59-30$ | 59      | $59+30$ |
| $59-12$ | $59+54$ | $59-42$ |



# 研究歷程

2. 中心為73的質數幻方：

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 103 | 7   | 109 |
| 79  | 73  | 67  |
| 37  | 139 | 43  |

(1) 找出四組等差數列：

| 第一項 | 第二項 | 第三項 | 公差 |
|-----|-----|-----|----|
| 67  | 73  | 79  | 6  |
| 43  | 73  | 103 | 30 |
| 37  | 73  | 109 | 36 |
| 7   | 73  | 139 | 66 |

(2) 轉為加減公差的形式：

|         |         |         |
|---------|---------|---------|
| $73+30$ | $73-66$ | $73+36$ |
| $73+6$  | 73      | $73-6$  |
| $73-36$ | $73+66$ | $73-30$ |



# 研究歷程

統整：將四組數列的公差，由小到大設為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ ，則幻方可分為以下兩類。

|         |         |         |
|---------|---------|---------|
| 質數 $+c$ | 質數 $-d$ | 質數 $+a$ |
| 質數 $-b$ | 質數      | 質數 $+b$ |
| 質數 $-a$ | 質數 $+d$ | 質數 $-c$ |

$a+b=c$  且  $a+c=d$ 。

|         |         |         |
|---------|---------|---------|
| 質數 $+b$ | 質數 $-d$ | 質數 $+c$ |
| 質數 $+a$ | 質數      | 質數 $-a$ |
| 質數 $-c$ | 質數 $+d$ | 質數 $-b$ |

$a+b=c$  且  $b+c=d$ 。



# 研究歷程

運用Excel尋找幻方：

1、先將質數的K整理：

|   | 2 | 4 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|----|
| 2 |   |   |   |    |
| 4 |   |   |   |    |
| 6 |   |   |   |    |

2、將每列與每欄相加除以二：

|   | 2             | 4             | 6             | 10             |
|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 2 | $(2+2)\div 2$ | $(2+4)\div 2$ | $(2+6)\div 2$ | $(2+10)\div 2$ |
| 4 | $(4+2)\div 2$ | $(4+4)\div 2$ | $(4+6)\div 2$ | $(4+10)\div 2$ |
| 6 | $(6+2)\div 2$ | $(6+4)\div 2$ | $(6+6)\div 2$ | $(6+10)\div 2$ |

3、運用函數，將不屬於k的全部變成X。

|   | 2 | 4 | 6 | 10 | ... | 270 |
|---|---|---|---|----|-----|-----|
| 2 | 2 | X | 4 | 6  | ... | 136 |
| 4 | X | 4 | X | X  | ... | X   |
| 6 | 4 | X | 6 | X  | ... | X   |

# 研究歷程

4、發現到這個表格，對角線兩端是相互對稱的，因此在找等差數列的時候，只需查找其中一邊三角形。以找24為例。

|    | 2  | 4  | 6  | 10 | 12 | 14 | 20 | 22 | 24 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2  | 2  | x  | 4  | 6  | x  | x  | x  | 12 | x  |
| 4  | x  | 4  | x  | x  | x  | x  | 12 | x  | 14 |
| 6  | 4  | x  | 6  | x  | x  | 10 | x  | 14 | x  |
| 10 | 6  | x  | x  | 10 | x  | 12 | x  | x  | x  |
| 12 | x  | x  | x  | x  | 12 | x  | x  | x  |    |
| 14 | x  | x  | 10 | 12 | x  | 14 | x  | x  | x  |
| 20 | x  | 12 | x  | x  | x  | x  | 20 | x  | 22 |
| 22 | 12 | x  | 14 | x  | x  | x  | x  | 22 | x  |
| 24 | x  | 14 | x  | x  | x  | x  | 22 | x  | 24 |
| 26 | 14 | x  | x  | x  | x  | 20 | x  | 24 | x  |
| 32 | x  | x  | x  | x  | 22 | x  | 26 | x  | x  |
| 34 | x  | x  | 20 | 22 | x  | 24 | x  | x  | x  |
| 36 | x  | 20 | x  | x  | 24 | x  | x  | x  | x  |
| 42 | 22 | x  | 24 | 26 | x  | x  | x  | 32 | x  |
| 46 | 24 | x  | 26 | x  | x  | x  |    | 34 | x  |



# 研究歷程

5、將對應的k列出來，並列出它與24之間的差：

|       |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|
| k值    | 26 | 34 | 36 | 42 | 46 |
| k值-24 | 2  | 10 | 12 | 18 | 22 |

6、此時k的數以24為中心的數列為其公差：

| 第一項 | 第二項 | 第三項 | 公差 |
|-----|-----|-----|----|
| 22  | 24  | 26  | 2  |
| 14  | 24  | 34  | 10 |
| 12  | 24  | 36  | 12 |
| 6   | 24  | 42  | 18 |
| 2   | 24  | 46  | 22 |

# 研究歷程

7、可從公差發現2、10、12、22這個組合，符合 $a+b=c$ 且 $b+c=d$ 的類型。

8、將數列列出並調整，就可以找出以24為中心的幻方：

|    |    |    |
|----|----|----|
| 34 | 2  | 36 |
| 26 | 24 | 22 |
| 12 | 46 | 14 |



# 研究歷程

9、數字調整回質數，就找出質數幻方。

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 109 | 7   | 103 |
| 67  | 73  | 79  |
| 43  | 139 | 37  |

# 研究結果

1.  $a+b=c$  且  $a+c=d$  類。例： $3k+1$  類， $k$  為 102。

(1) 四組三項等差數列：

| 第一項 | 第二項 | 第三項 | 公差  |
|-----|-----|-----|-----|
| 277 | 307 | 337 | 30  |
| 73  | 307 | 541 | 234 |
| 43  | 307 | 571 | 264 |
| 13  | 307 | 601 | 294 |

(2) 三組三項等差數列：

| 第一項 | 第二項 | 第三項 | 公差 |
|-----|-----|-----|----|
| 541 | 571 | 601 | 30 |
| 277 | 307 | 337 | 30 |
| 13  | 43  | 73  | 30 |



# 研究結果

2. 將幻方的質數列出，並計算差距時，發現數之間的差是6的倍數，例： $3k+1$ ， $k$ 為102的幻方。

|    |    |    |     |     |     |     |     |     |
|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 13 | 43 | 73 | 277 | 307 | 337 | 541 | 571 | 601 |
|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

例：(1)  $277 - 73 = 204 = 6 \times 34$

(2)  $541 - 337 = 204 = 6 \times 34$

3. 除了2與3，其他質數都可分為 $6K\pm 1$ ，以後想用 $6K\pm 1$ 進行研究。

4. 除了用 $6K\pm 1$ 進行研究以外，也可以往更高階數的幻方研究。



# 第一個問題

●有太多資料，而且沒有聚焦於問題

解決方法：

篩選資料，只尋找關於主題的問題

## 第二個問題

- 找尋過程錯誤，找出的幻方也出錯

解決方法：

將尋找過程檢查一遍，將錯誤的地方改掉



# 資料來源

(一) 黃欣怡、徐麗萍(2012)。找尋三階質數魔方陣。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會國中組數學科

(二) 幻方-維基百科, 自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%BB%E6%96%B9>

(三) 質數-維基百科, 自由的百科全書

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%B4%A8%E6%95%B0>

感謝大家

謝謝聆聽