

The background is a vibrant autumn-themed illustration. On the left, a red brick barn with a yellow bell hangs from its roof. A yellow school bus is driving on a winding road that curves through the scene. The landscape is filled with stylized trees in shades of orange, yellow, and brown. In the bottom right corner, there are several large, detailed pumpkins. The sky is a clear, light blue, and a few autumn leaves are scattered throughout, including one in the top left and another in the top right.

勝者為王

兩隊淘汰賽勝負 組合分析

一、研究動機

1. 在生活中，常會遇到各種比賽或競爭的情境，例如：體育方面的競賽、遊戲闖關或選拔活動等。其中有一種常見的比賽方式是「輸了就淘汰，贏的人繼續比下去」，這種規則看起來很簡單，但實際上比賽過程會隨著每一場的勝負而產生許多不同的變化。

一、研究動機

2. 本研究以甲、乙兩隊各有4名選手為例，讓雙方依編號順序上場比賽，輸的一方淘汰，贏的人留下來繼續比賽，直到其中一隊的4名選手全部被淘汰為止。因為每一場比賽都可能由甲隊或乙隊獲勝，因此整個比賽過程會出現許多不同的排列方式。



二、擬定正式計畫、研究問題 及工作進度表

(一)擬定研究計畫



我們首先訂定研究方向，針對「甲、乙兩隊各有 4 人且依序上場，比賽採輸者淘汰、勝者留場」的規則，進行初步的分析與整理。透過大膽的假設與逐步驗證，嘗試找出此類比賽在固定規則之下所可能產生的所有賽況組合。





二、擬定正式計畫、研究問題 及工作進度表

(二)訂定研究問題



第一隊A、B、C、D；第二隊a、b、c，若每個人和另一人對戰的機率都是二分之一，求第一隊最後獲勝的機率為何？



二、擬定正式計畫、研究問題 及工作進度表

(三)

工作進度表

預定進度甘梯圖	114. 09. 04 ~ 114. 12. 07	114. 09. 18 ~ 114. 10. 18	114. 10. 09 ~ 114. 10. 31	114. 10. 18 ~ 114. 11. 15	114. 11. 01 ~ 114. 11. 30	114. 11. 15 ~ 114. 12. 10	114. 12. 01 ~ 114. 12. 07
文獻閱讀與探索	■						
擬定研究問題	■	■					
初步研究發現		■	■	■			
深入研究問題				■	■		
提出研究結果					■	■	
歸納研究結果						■	■
整理報告							■
進度累計 (%)	10	30	45	60	70	90	100

三、彙整相關文獻

「淘汰賽制」也就是輸的人出局，贏的人繼續比賽，過程會隨著每一場的勝負而產生很多不同的比賽組合與變化。單淘汰賽在數學上可以被看作是一種「依序淘汰」的過程，每一場比賽就像是在做一個選擇，這些選擇組合起來，就構成不同的比賽路線。本研究的題目正是屬於這一類型，因此可以用類似的方法來思考和分析。

- 資料來源：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/單淘汰賽>

三、彙整相關文獻

樹狀圖可以把每一步的結果分成分支，能清楚看到所有可能的發展方向，並避免漏掉某些情況或重複計算。本研究在整理「可能的賽況數」時，也會使用樹狀圖，把比賽的所有可能發展畫出來，幫助我們更清楚地找出正確答案。

- 資料來源：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/樹狀圖>

四、資料分析(一)

為了讓這個研究的主題更完善，我們研究小組先自行設計問題，以利於我們主題也就是分成兩隊，每隊各4人的對戰之方法數探討。

這裡我們用設計問題三來說明：第一隊A、B、C、D、E；第二隊a、b、c、d，若每個人和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？

(獲勝：0；失敗：X)

研究方法：我們嘗試用「重複組合」的方法來解決上述的問題。

首先假設 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 分別為A、B、C、D、E獲勝的場次：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	總場次
4	0	0	0	0	4
0	4	0	0	0	5
0	0	4	0	0	6
0	0	0	4	0	7
0	0	0	0	4	8
(3,1)					
(2,2)					
(2,1,1)					
(1,1,1,1)					

狀況1：打到A就結束比賽，亦即 $x_1 = 4 \Rightarrow 1$ 種
(共比賽4場)

狀況2：打到B就結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 = 4$ ；
 $x_2 \geq 1$ ，

所以假設 $x_2 = x'_2 + 1$ ，因此 $x_1 + x'_2 = 3$ 但 $x'_2 \geq 0$

方法數為： $H_3^2 = C_3^4 = C_1^4$ (共比賽5場)

狀況3：打到C結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ；

$x_3 \geq 1$ ，所以假設 $x_3 = x'_3 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x'_3 = 3$ ，但 $x'_3 \geq 0$ 方法數為：

$$H_3^3 = C_3^5 = C_2^5 \quad (\text{共比6場})$$

狀況4：打到D結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$

4 ； $x_4 \geq 1$ ，所以假設 $x_4 = x'_4 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 3$ ，但 $x'_4 \geq 0$ 方法數為：

$$H_3^4 = C_3^6 \quad (\text{共比7場})$$

狀況5：打到E才結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ；

$x_5 \geq 1$ ，假設 $x_5 = x'_5 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x'_5 = 3$ ，

但 $x'_5 \geq 0$ 方法數為： $H_3^5 = C_3^7 = C_4^7$ （共比8場）

所以第一隊獲勝之機率為：

$$C_0^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_1^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_2^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_3^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_4^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \frac{163}{256}$$

小結1

我們為了讓研究結果更完整，直接把問題設為第一隊A、B、C、D……共m個人；第二隊a、b、c、d……共n個人(m>n)

由之前所設計的3個預設問題，利用「重複組合」做歸納，則第一隊獲勝之機率為：

$$\sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n}$$



小結2



如果將第一隊 m 人，第二隊 n 人，去互相對戰，
每場比賽都是男子羽毛球單打比賽，且兩人對
戰獲勝機率都是 $\frac{1}{2}$ ，以羽毛球聯盟BWF巡迴賽
為例，冠軍200萬台幣，亞軍100萬台幣，也就
是300萬分給兩隊的概念，我們可以列出每一
種狀況之下，第一隊獎金的期望值為下表：



第一隊人數	第二隊人數	第一隊獎金之期望值
3人	2人	$200\text{萬} \times \frac{3}{4} + 100\text{萬} \times \frac{1}{4} = 175\text{萬}$
4人	3人	$200\text{萬} \times \frac{21}{32} + 100\text{萬} \times \frac{11}{32} = 1656250\text{元}$
5人	4人	$200\text{萬} \times \frac{263}{256} + 100\text{萬} \times \frac{93}{256} = 1636718\text{元}$
m人	n人	$200\text{萬} \times \sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n}$ $+ 100\text{萬} \times \left[1 - \sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n} \right]$

四、資料分析(二)

利用兩隊人數相同，去研究對戰方法數，第一隊第一個人也就是A獲勝次數逐一討論的方式，去研究數列的規律性和重複組合有否其他公式產生或藏著巴斯卡原理，過程如下：兩隊隊員第一隊A、B、C、D…；第二隊a、b、c、d…(人數相同)。

這裡我們用兩隊各7人來進行討論：

A獲勝場次	A	B	C	D	E	F	G	a	b	c	d	e	f	g	獲勝隊伍
7	0							X							第一隊
	0								X						
	0									X					
	0										X				
	0											X			
	0												X		
	0													X	
$(C_0^5 = 1種)$															
6	0							X							第一隊
	0								X						
	0									X					
	0										X				
	0											X			
	0												X		
	X													0	
剩下B、C、D、E、F、G去對決g $(1 + 5 = C_0^5 + C_1^5 = C_1^6)$															

A獲勝場次	A	B	C	D	E	F	G	a	b	c	d	e	f	g	獲勝隊伍
5	0							X							第一隊
	0								X						
	0									X					
	0										X				
	0											X			
	X												0		
	剩下B、C、D、E、F、G去對決f、g $(1 + 5 + 15 = C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 = C_2^7)$														
4	0							X							第一隊
	0								X						
	0									X					
	0										X				
	X											0			
	剩下B、C、D、E、F、G去對決e、f、g $(1 + 5 + 15 + 35 = C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 = C_3^8)$														

A獲勝場次	A	B	C	D	E	F	G	a	b	c	d	e	f	g	獲勝隊伍
3	O							X							第一隊
	O								X						
	O									X					
	X										O				
	剩下B、C、D、E、F、G去對決d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 = C_4^9)$														
2	O							X							第一隊
	O								X						
	X									O					
	剩下B、C、D、E、F、G去對決c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 = C_5^{10})$														
1	O							X							第一隊
	X								O						
	剩下B、C、D、E、F、G去對決b、c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} = C_6^{11})$														

A獲勝場次	A	B	C	D	E	F	G	a	b	c	d	e	f	g	獲勝隊伍
0	X						O								第一隊
	B、C、D、E、F、G去對決a、b、c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} + C_7^{11} = C_7^{12})$														

$$\begin{aligned} \therefore H_7^7 &= C_7^{13} = \sum_{n=1}^8 C_{n-1}^{n+4} \\ &= C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} + C_7^{11} \end{aligned}$$

$\therefore$ 方法數為：

$$2 \times \sum_{n=1}^8 \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3432$$

五、提出研究結果

(一)如果A隊有m人，B隊有n人(其中 $m > n$)，則第一隊獲勝機率為：

$$\sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n}$$

(二)如果A隊有m人，B隊有n人(其中 $m > n$)，冠軍200萬，亞軍100萬，則第一隊參賽獎金的期望值為：

$$200 \text{ 萬} \times \sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n} + 100 \text{ 萬} \times \left[1 - \sum_{k=1}^m C_{n-1}^{n+k-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1+n} \right]$$

(三)如果A、B兩隊人數相同，各有n人，對戰之方法數為：

$$2 \cdot H_n^n = 2 \cdot C_n^{2n-1} = 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (n-1)!}$$

(四)由上面之方法數，以第一隊的第一個隊員A去作探討，我們得到一個發現：

$$H_n^n = C_0^{n-2} + C_1^{n-1} + C_2^n + \cdots + C_n^{2n-2}$$

(五)相同的道理，由第一隊的第一位球員A的勝場數依序討論，得到第一隊獲勝方法數的一般項為：

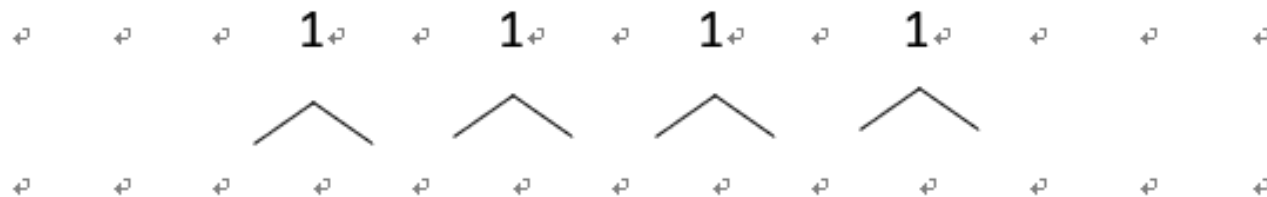
$$a_n = \frac{n \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (2n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2)}$$

而且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = H_n^n = C_n^{2n-1}$

(六)我們由上面的第5點可以知道，我們更進一步將 $a_1、a_2、a_3、\dots、a_{n+1}$ 看看每個數字的差，一直往上堆看看一直到 $1、1、1、\dots、1$ 可堆 $(n-1)$ 層，這就是 a_n 的一般項最高次方 $(n-2)$ 次方， a_n 為階差數列。

第 $(n-1)$ 層

樓



第二層樓



第一層樓



六、評鑑與檢討

(一)研究動機的部分：

本研究由生活中常見的「輸者淘汰、勝者續戰」比賽情境出發，以兩隊依序上場、淘汰制的比賽為研究主題，高度生活化與融入真實情境，具備數學探究價值。

(二)擬定正式計畫、研究問題及工作進度表的部分：

本研究在擬定研究計畫時，已明確規劃將研究問題依人數增加分成三個層次（3對2、4對3、5對4），再進一步推廣至「 m 對 n 」的一般化形式，但一開始對於每個階段所需的時間預估不夠精確，低估了計算與驗證所需的時間，因此研究進度的規劃需要隨研究過程隨時調整。

六、評鑑與檢討

(三)彙整相關文獻的部分：

在整理文獻時，發現主要引用來源仍以維基百科、教學平台為主，缺乏更進階的學術研究或論文參考。

(四)資料分析的部分：

雖然資料分析相當完整，但在檢討過程中，也發現可再精進之處，計算量增加時，若能結合程式進行驗證，可提高準確性與效率。



(五)研究結果與討論部分：

本研究的成果不只解決一個比賽問題，更探討出背後的數學結構與規律，包括：

1. 推導出當A隊有 m 人，B隊有 n 人 ($m > n$) 時的獲勝機率公式。
2. 推導出在獎金條件下，第一隊的參賽獎金期望值公式。
3. 推導出如果A、B兩隊人數相同對戰之方法數。
4. 發現當兩隊人數相同時，對戰方法數出現與帕斯卡三角形組合數高度相關。



在研究過程中發現原本的直覺多次被推翻，數學不能只靠感覺，一定要靠推理與驗證。



七、參考資料

(一)排列組合與基本概念 (台灣高中數學課綱)

<https://www.ceec.edu.tw>

(二)組合數學簡介 (WIKI)

<https://zh.wikipedia.org/wiki/組合數學>

(三)樹狀圖與機率應用 (數學教學平台)

<https://mathcrackers.com>



感謝教授的聆聽



敬請指導

