

彰化縣 114 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

☐ 國小組

☒ 數學類

☐ 自然、科技類

☒ 國中組

☐ 人文社會類

組別： 數 學

作品名稱： 勝者為王-兩隊淘汰賽勝負組合分析

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究是資優教育的重點課程之一，本校積極推動資優生參與獨立研究作品甄選，課程採取分組教學進行，抽離式資優班課程中設立獨立研究、專題研究等相關課程，數理組學生每週有固定時間進行獨立研究課程，在老師引導下，讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，訓練學生蒐集資料、分析資料、統整與發表之能力，強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力，並培養學生對研究領域之專精化程度與深入研究之精神。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

獨立研究課程透過系統化的設計，讓學生從瞭解主題方向的擬定、資料的收集、問題的設定、解題的歷程...等提升學生的創作力及培養學生探究的能力。指導老師適時引導、規劃時間進度的安排、透過小組分工合作讓參與的學生能夠自主完成相關研究內容。作品完成後訓練發表的技巧，讓學生從整個歷程中學到不少解決問題的能力。輔導室亦會辦理資優生的增能營隊，請有經驗的老師及得獎學生進行經驗分享與傳承。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在生活中，常會遇到各種比賽或競爭的情境，例如體育方面的競賽、遊戲闖關或選拔活動等。其中有一種常見的比賽方式是「輸了就淘汰，贏的人繼續比下去」，這種規則看起來很簡單，但實際上比賽過程會隨著每一場的勝負而產生許多不同的變化。

本研究以甲、乙兩隊各有 4 名選手為例，讓雙方依編號順序上場比賽，輸的一方淘汰，贏的人留下來繼續比賽，直到其中一隊的 4 名選手全部被淘汰為止。因為每一場比賽都可能由甲隊或乙隊獲勝，因此整個比賽過程會出現許多不同的排列方式。

我們希望透過這題來了解在這種簡單規則的比賽中，實際上會產生多少種不同的比賽情況。透過整理與分析這些可能的賽況，可以幫助我們更清楚理解排列組合與邏輯推理的概念，也能體會到數學在實際生活中的應用，本研究具有理論與實務上的雙重意義，值得進一步探討與分析。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一) 擬定研究計畫

我們首先訂定研究方向，針對「甲、乙兩隊各有 4 人且依序上場，比賽採輸者淘汰、勝者留場」的規則，進行初步的分析與整理。透過大膽的假設與逐步驗證，嘗試找出此類比賽在固定規則之下所可能產生的所有賽況組合。

研究過程中，我們將藉由樹狀圖與列表方式，將每一場比賽可能出現的「勝 / 敗」情形逐一系列出，並結合排列組合的觀念，來整理與歸納其規律性。此外，也會運用簡單的遞迴思考方式，將比賽歷程抽象化為數對（例如：甲隊被淘汰人數、乙隊被淘汰人數），藉以分析比賽的終止條件與其路徑數量。

(二) 訂定研究問題

1. 第一隊 A、B、C；第二隊 a、b，若每個人和另一人對戰的機率都是

$\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？

2. 第一隊 A、B、C、D；第二隊 a、b、c，若每個人和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？
3. 第一隊 A、B、C、D、E；第二隊 a、b、c、d，若每個人和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？

(三) 工作進度表

預定進度甘梯圖	114. 09. 04 ~ 114. 12. 07	114. 09. 18 ~ 114. 10. 18	114. 10. 09 ~ 114. 10. 31	114. 10. 18 ~ 114. 11. 15	114. 11. 01 ~ 114. 11. 30	114. 11. 15 ~ 114. 12. 10	114. 12. 01 ~ 114. 12. 07
文獻閱讀與探索	■						
擬定研究問題	■	■					
初步研究發現		■	■	■			
深入研究問題				■	■		
提出研究結果					■	■	
歸納研究結果						■	■
整理報告							■
進度累計(%)	10	30	45	60	70	90	100

三、彙整相關文獻

(一)淘汰賽的基本概念

在體育比賽、遊戲比賽或選拔活動中，常見一種比賽方式是「淘汰賽制」，也就是輸的人立刻出局，贏的人可以繼續和下一位選手比賽。這樣的比賽方式有一個特點，就是比賽過程會隨著每一場的勝負而有所不同，因此可以產生很多不同的比賽組合與變化。相關資料指出，單淘汰賽在數學上可以被看作是一種「依序淘汰」的過程，每一場比賽就像是在做一個選擇，而這些選擇組合起來，就構成不同的比賽路線。本研究的題目正是屬於這一類型，因此可以用類似的方法來思考和分析。

資料來源：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/單淘汰賽>

(二)樹狀圖在數學中的應用

在數學中，當一個問題有很多種可能的情況時，常會使用「樹狀圖」來幫助整理。樹狀圖可以把每一步的結果成分支，讓我們清楚看到所有可能的發展方向，並避免漏掉某些情況或重複計算。在機率與排列組合的相關教學中，常用樹狀圖來解決例如骰子、硬幣、比賽勝負等問題。只要每一場比賽的結果只有兩種（甲勝或乙勝），就可以把每一場當作一個分支，一步一步接下去，直到比賽結束為止。

本研究在整理「可能的賽況數」時，也會使用樹狀圖，把比賽的所有可能發展畫出來，幫助我們更清楚地找出正確答案。

資料來源：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/樹狀圖>

(三) 排列組合與路徑問題

排列組合是數學中專門研究「有多少種可能安排方式」的部分，例如排隊順序、選擇方法、走路路徑等，都可以用排列組合的概念來解決。有些數學問題，會把現實情況轉化成「往右或往上移動」的路徑問題，例如從起點走到終點，有多少條不同的路線。這種「路徑數」的概念，其實就和本研究題目非常相似：

1. 甲輸一場 → 甲被淘汰一人。
2. 乙輸一場 → 乙被淘汰一人。
3. 當其中一方被淘汰四人，比賽就結束。

因此，比賽的過程就像是一條路線，而我們要做的，就是找出所有可能的「比賽路線」有幾條。

資料來源：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/排列組合>

四、資料分析

(一) 為了讓這個研究的主題更完善，我們研究小組先自行設計問題，以利於我們主題也就是分成兩隊，每隊各 4 人的對戰之方法數探討。

1. 設計問題一：第一隊 A、B、C；第二隊 a、b，若每個人和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？(獲勝：O；失敗：X)

研究方法：因為我們學過窮舉法，所以我們列出所有可能來做

討論。

Case	A	B	C	總場次
①	O O			2
②	O X	O		3
	O X	X	O	4
③	X	O O		3
	X	O X	O	4
	X	X	O O	4

由 ①、②、③ 統計出，總場次 2 場的有 1 次，3 場的有 2 次，4 場的有 3 次，因此第一隊獲勝的機率為：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 3 = \frac{3}{4}$$

這個結果顯然和我們之前的猜測有很大的落差，因為我們的猜

測是 $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$ ，這也更加激發了我們繼續研究的動力。

2. 設計問題二：第一隊 A、B、C、D；第二隊 a、b、c，若每個人

和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率為何？

(獲勝：O；失敗：X)

研究方法：我們嘗試使用列表討論的方法來解決上列設計的問題。首先假設 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 分別為 A、B、C、D 獲勝的場次，以下表格為研究紀錄的方式：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

x_1	x_2	x_3	x_4	總場次
3	0	0	0	3

0	3	0	0	4
0	0	3	0	5
0	0	0	3	6
1	2	0	0	4
2	1	0	0	4
1	0	2	0	5
2	0	1	0	5
1	0	0	2	6
2	0	0	1	6
0	1	2	0	5
0	2	1	0	5
0	1	0	2	6
0	2	0	1	6
0	0	1	2	6
0	0	2	1	6
1	1	1	0	5
1	1	0	1	6
1	0	1	1	6
0	1	1	1	6

經過統計之後，需要比賽 3、4、5、6 場的分別有 1、3、6、10 次，所以第一隊獲勝的機率為：

$$1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{21}{32}$$

結果和我們初步預估的 $4 \div (3 + 4) = \frac{4}{7}$ 有很大的出入。

3. 設計問題三：第一隊 A、B、C、D、E；第二隊 a、b、c、d，若每個人和另一人對戰的機率都是 $\frac{1}{2}$ ，求第一隊最後獲勝的機率

為何？(獲勝：O；失敗：X)

研究方法：我們嘗試用「重複組合」的方法來解決上述的問題。

首先假設 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 分別為 A、B、C、D、E 獲勝的場次：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	總場次
4	0	0	0	0	4
0	4	0	0	0	5
0	0	4	0	0	6
0	0	0	4	0	7
0	0	0	0	4	8
(3,1)					
(2,2)					
(2,1,1)					
(1,1,1,1)					

狀況 1：打到 A 就結束比賽，亦即 $x_1 = 4 \Rightarrow 1$ 種 (共比賽 4 場)

狀況 2：打到 B 就結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 = 4$ ； $x_2 \geq 1$ ，所以假設 $x_2 = x'_2 + 1$ ，因此 $x_1 + x'_2 = 3$ 但 $x'_2 \geq 0$ 方法數為：

$$H_3^2 = C_3^4 = C_1^4 \quad (\text{共比 5 場})$$

狀況 3：打到 C 結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ； $x_3 \geq 1$ ，
所以假設 $x_3 = x'_3 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x'_3 = 3$ ，但 $x'_3 \geq 0$ 方法
數為：

$$H_3^3 = C_3^5 = C_2^5 \quad (\text{共比 6 場})$$

狀況 4：打到 D 結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ ； $x_4 \geq 1$ ，
所以假設 $x_4 = x'_4 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 3$ ，但
 $x'_4 \geq 0$ 方法數為：

$$H_3^4 = C_3^6 \quad (\text{共比 7 場})$$

狀況 5：打到 E 才結束比賽，亦即 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ； $x_5 \geq 1$ ，
假設 $x_5 = x'_5 + 1$ ，因此 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x'_5 = 3$ ，但 $x'_5 \geq 0$ 方法數為：

$$H_3^5 = C_3^7 = C_4^7 \quad (\text{共比 8 場})$$

所以第一隊獲勝之機率為：

$$\begin{aligned} & C_0^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_1^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_2^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_3^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_4^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \frac{163}{256} \end{aligned}$$

小結：

1. 我們為了讓研究結果更完整，直接把問題設為第一隊 A、B、
C、D.....共 m 個人；第二隊 a、b、c、d.....共 n 個人($m > n$)

由之前所設計的 3 個預設問題，利用「重複組合」做歸納，則
第一隊獲勝之機率為：

$$\frac{C_0^{n-1} \cdot n + C_1^n \cdot (n+1) + C_2^{n+1} \cdot (n+2) + \cdots + C_{m-1}^{m+n-2} \cdot (m+n-1)}{2^{m+n}}$$

2. 如果將第一隊 m 人，第二隊 n 人，去互相對戰，每場比賽都是
男子羽毛球單打比賽，且兩人對戰獲勝機率都是 $\frac{1}{2}$ ，以羽毛球
聯盟 BWF 巡迴賽為例，冠軍 200 萬台幣，亞軍 100 萬台幣，也

就是 300 萬分給兩隊的概念，我們可以列出每一種狀況之下，第一隊獎金的期望值為下表：

第一隊人數	第二隊人數	第一隊獎金之期望值
3 人	2 人	$200\text{萬} \times \frac{3}{4} + 100\text{萬} \times \frac{1}{4} = 175\text{萬}$
4 人	3 人	$200\text{萬} \times \frac{21}{32} + 100\text{萬} \times \frac{11}{32}$ $= 1656250\text{元}$
5 人	4 人	$200\text{萬} \times \frac{263}{256} + 100\text{萬} \times \frac{93}{256}$ $= 1636718\text{元}$
m 人	n 人	$200\text{萬} \times \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{n-1+k} \times (n+k)}{2^{m+n}}$ $+ 100\text{萬} \times \left[1 - \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{n-1+k} \times (n+k)}{2^{m+n}} \right]$

(二) 我們想要利用兩隊人數相同，去研究對戰方法數，利用第一隊第一個人獲勝次數逐一討論的方式，去研究數列的規律性，和重複組合有否其他公式產生，順便去找出哪裡有藏著巴斯卡原理，相信這個研究會讓人耳目一新。過程如下：兩隊隊員第一隊 A、B、C、D...；第二隊 a、b、c、d...(人數相同)。

1. 兩隊各 1 人：A、a $\Rightarrow$ 2 種(A 獲勝或 a 獲勝)

2. 兩隊各 2 人：

A 獲勝場次	A	B	a	b	獲勝隊伍
2	O		X		第一隊
	O			X	

1	O		X		第一隊
	X			O	
	剩下 B 對決 b(1 種)				
0	X		O		第一隊
	剩下 B 對決 a、b(1 種)				

所以 $2 \times 3 = 6$ 種，因為有可能第 2 隊贏。

3. 兩隊各 3 人：

A 獲勝場次	A	B	C	a	b	c	獲勝隊伍
0	X			O			第一隊
	剩下 B、C 去對決 a、b、c (4 種)						
1	O			X			第一隊
	X				O		
	剩下 B、C 去對決 b、c (3 種)						
2	O			X			第一隊
	O				X		
	X					O	
	剩下 B、C 去對決 c (2 種)						
3	O			X			第一隊
	O				X		
	O					X	
	B、C 不用出賽 (1 種)						

所以共有 $(1 + 2 + 3 + 4) \times 2 = 20$ 種對戰的方法數，初步我們得到一種猜測，對戰方法數可以記錄為：

$$2 \times \sum_{n=1}^4 n = 20$$

4. 兩隊各 4 人：

A 獲勝場次	A	B	C	D	a	b	c	d	獲勝隊伍
4	O				X				第一隊
	O					X			
	O						X		
	O							X	
	1 種								
3	O				X				第一隊
	O					X			
	O						X		
	X							O	
	剩下 B、C、D 去對決 d (3 種)								
2	O				X				第一隊
	O					X			
	X						O		
	剩下 B、C、D 去對決 c、d (6 種)								
1	O				X				第一隊
	X					O			
	剩下 B、C、D 去對決 b、c、d (10 種)								
0	X				O				第一隊
	剩下 B、C、D 去對決 a、b、c、d (15 種)								

所以共有 $(1 + 3 + 6 + 10 + 15) \times 2 = 70$ 種對戰的方法數，初步我們得到一種猜測，對戰方法數可以記錄為：

$$2 \times \sum_{n=1}^5 \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 70$$

5. 兩隊各 5 人：

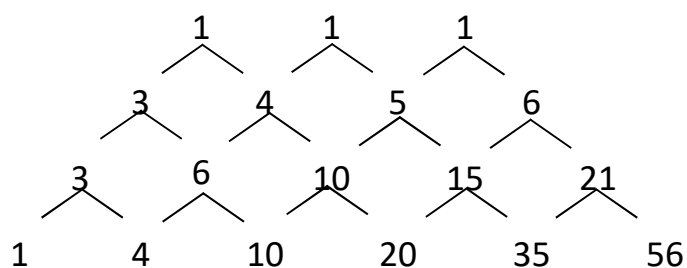
A 獲勝場次	A	B	C	D	E	a	b	c	d	e	獲勝隊伍
5	O					X					第一隊
	O						X				
	O							X			
	O								X		
	O									X	
	1 種										
4	O					X					第一隊
	O						X				
	O							X			
	O								X		
	X									O	
	剩下 B、C、D、E 去對決 e (4 種)										
3	O					X					第一隊
	O						X				
	O							X			
	X								O		
	剩下 B、C、D、E 去對決 d、e (10 種)										
2	O					X					第一隊
	O						X				
	X							O			
	剩下 B、C、D、E 去對決 c、d、e 共(1+3+6+10=20 種)										
1	O					X					第一隊
	X						O				
	剩下 B、C、D、E 去對決 b、c、d、e										

	共(1+3+6+10+15=35 種)										
0	X					O					第一隊
	剩下 B、C、D、E 去對決 a、b、c、d、e 共(1+3+6+10+15+21=56 種)										

所以共有 $(1 + 3 + 6 + 10 + 20 + 35 + 56) \times 2 = 252$ 種對戰的方法數，初步我們得到一種猜測，對戰方法數可以記錄為：

$$2 \times \sum_{n=1}^6 \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = 252$$

而且我們更進一步將 1、4、10、20、35、56 看看每個數字的差，一直往上堆，看看一直到 1，1，1，1 可以堆多少層(研究如下)：



6. 兩隊各 6 人：

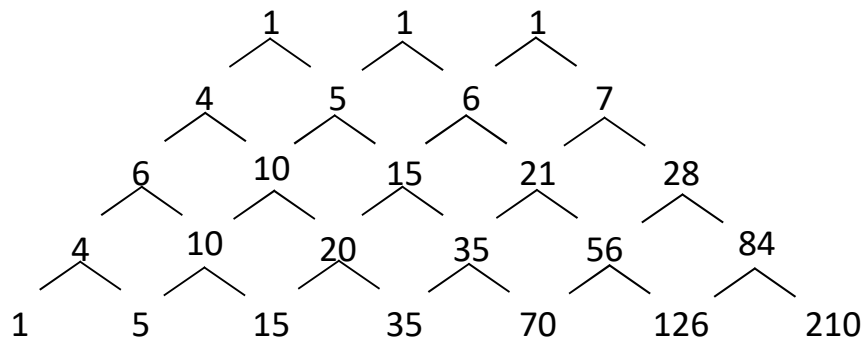
A 獲勝場次	A	B	C	D	E	F	a	b	c	d	e	f	獲勝隊伍
6	O						X						第一隊
	O							X					
	O								X				
	O									X			
	O										X		
	O											X	
	$(C_0^4 = 1 \text{ 種})$												
5	O						X						第一隊
	O							X					

	O							X				
	O								X			
	O									X		
	X										O	
	剩下 B、C、D、E、F 去對決 f ($C_1^5 = 5$ 種)											
4	O						X					第一隊
	O							X				
	O								X			
	O									X		
	X										O	
剩下 B、C、D、E、F 去對決 e、f ($C_2^6 = 15$ 種)												
3	O						X					第一隊
	O							X				
	O								X			
	X									O		
	剩下 B、C、D、E、F 去對決 d、e、f ($C_3^7 = 35$ 種)											
2	O						X					第一隊
	O							X				
	X								O			
	剩下 B、C、D、E、F 去對決 c、d、e、f ($C_4^8 = 70$ 種)											
1	O						X					第一隊
	X							O				
	剩下 B、C、D、E、F 去對決 b、c、d、e、f ($C_5^9 = 126$ 種)											
0	X						O					第一隊

	剩下 B、C、D、E、F 去對決 a、b、c、d、 e、f $(C_6^{10} = 210 \text{種})$	
--	---	--

$$\therefore H_6^6 = C_6^{11} = C_0^4 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} = 462$$

$$\therefore \text{方法數為：} 2 \times \sum_{n=0}^6 \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924$$



$\therefore$ 一般項 n 的 4 次方，則到 1,1,1,... 共 5 層

7. 兩隊各 7 人：

A 獲勝場次	A	B	C	D	E	F	G	a	b	c	d	e	f	g	獲勝隊伍
7	O							X							第一隊
	O								X						
	O									X					
	O										X				
	O											X			
	O												X		
	O													X	
	O														
$(C_0^5 = 1 \text{種})$															

6	O							X								第一隊
	O								X							
	O									X						
	O										X					
	O											X				
	O												X			
	X														O	
	剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 g (1 + 5 = C ₀ ⁵ + C ₁ ⁵ = C ₁ ⁶)															

5	O							X								第一隊
	O								X							
	O									X						
	O										X					
	O											X				
	O												X			
	X														O	
剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 f、g (1 + 5 + 15 = C ₀ ⁵ + C ₁ ⁵ + C ₂ ⁶ = C ₂ ⁷)																

4	O							X								第一隊
	O								X							
	O									X						
	O										X					
	X													O		
	剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 e、f、g (1 + 5 + 15 + 35 = C ₀ ⁵ + C ₁ ⁵ + C ₂ ⁶ + C ₃ ⁷ = C ₃ ⁸)															

3	O							X								第一隊
	O								X							
	O									X						

	X									O				
	剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 = C_4^9)$													
2	O							X						第一隊
	O								X					
	X									O				
	剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 = C_5^{10})$													
1	O							X						第一隊
	X								O					
	剩下 B、C、D、E、F、G 去對決 b、c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} = C_6^{11})$													
0	X							O						第一隊
	B、C、D、E、F、G 去對決 a、b、c、d、e、f、g $(C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} + C_7^{11} = C_7^{12})$													

$$\begin{aligned} \therefore H_7^7 = C_7^{13} &= \sum_{n=1}^8 C_{n-1}^{n+4} \\ &= C_0^5 + C_1^5 + C_2^6 + C_3^7 + C_4^8 + C_5^9 + C_6^{10} + C_7^{11} \end{aligned}$$

∴ 方法數為：

$$2 \times \sum_{n=0}^6 \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3432$$

五、提出研究結果

(一) 如果 A 隊有 m 人，B 隊有 n 人(其中 $m > n$)，則第一隊獲勝機率為：

$$\frac{C_0^{n-1} \cdot n + C_1^n \cdot (n+1) + C_2^{n+1} \cdot (n+2) + \cdots + C_{m-1}^{m+n-2} \cdot (m+n-1)}{2^{m+n}}$$

(二) 如果 A 隊有 m 人，B 隊有 n 人(其中 $m > n$)，冠軍 200 萬，亞軍 100 萬，則第一隊參賽獎金的期望值為：

$$200\text{萬} \times \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{n-1+k} \cdot (n+k)}{2^{m+n}} + 100\text{萬} \times \left[1 - \frac{\sum_{k=0}^{m-1} C_k^{n-1+k} \cdot (n+k)}{2^{m+n}} \right]$$

(三) 如果 A、B 兩隊人數相同，各有 n 人，對戰之方法數為：

$$2 \cdot H_n^n = 2 \cdot C_n^{2n-1} = 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! \cdot (n-1)!}$$

(四) 由上面之方法數，以第一隊的第一個隊員 A 去作探討，我們得到一個發現：

$$H_n^n = C_0^{n-2} \cdot (n+1) + C_1^{n-2} \cdot n + C_2^{n-1} \cdot (n-1) + C_3^n \cdot (n-2) + \cdots + C_n^{2n-3} \cdot 1$$

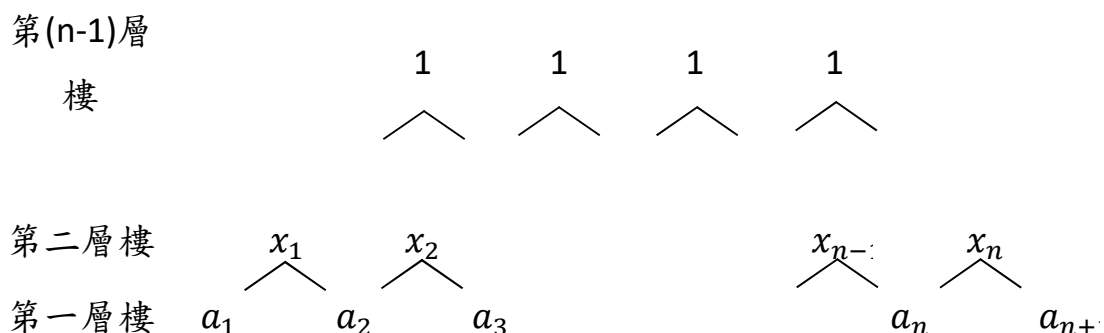
(五) 相同的道理，由第一隊的第一位球員 A 的勝場數依序討論，得到第一隊獲勝方法數的一般項為：

$$a_n = \frac{n \times (n+1) \times (n+2) \times \cdots \times (2n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2)}$$

$$\text{而且 } a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = H_n^n = C_n^{2n-1}$$

(六) 我們由上面的第 5 點可以知道，我們更進一步將 a_1 、 a_2 、 a_3 、 $\cdots$ 、 a_{n+1} 看看每個數字的差，一直往上堆看看一直到 1、1、1、 $\cdots$ 、1 可堆 $(n-1)$ 層，這就是 a_n 的一般項最高次方 $(n-2)$ 次方， a_n 為

階差數列。



六、評鑑與檢討(上述每一階段的省思與收穫)

(一) 研究動機的部分：

本研究由生活中常見的「輸者淘汰、勝者續戰」比賽情境出發，以兩隊依序上場、淘汰制的比賽為研究主題，高度生活化與融入真實情境，具備數學探究價值，成功將日常經驗轉化為可分析的數學問題，但在初期尚未明確界定所有研究變因與限制條件，例如：每一場比賽勝負結果是否真的機率相等？是否假設所有選手實力完全相同？需要清楚界定假設條件，讓研究更具有科學性與完整性。

(二) 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表的部分：

本研究在擬定研究計畫時，已明確規劃將研究問題依人數增加分成三個層次（3 對 2、4 對 3、5 對 4），再進一步推廣至「m 對 n」的一般化形式，工作進度表採用甘梯圖方式呈現，清楚分配每個任務的時間，但一開始對於每個階段所需的時間預估不夠精確，進行推導時，往往低估了計算與驗證所需的時間，因此研究進度的規劃不只是寫出來，而是需要隨研究過程隨時調整。

(三) 彙整相關文獻的部分：

在整理文獻時，發現主要引用來源仍以維基百科、教學平台為

主，較缺乏更進階的學術研究或論文參考。若未來有機會擴充研究，建議可以再加入高中或大學相關數學論文、數學競賽或獨立研究相關期刊。

(四) 資料分析的部分:

雖然資料分析相當完整，但在檢討過程中，也發現幾點可再精進之處：

1. 計算量增加時，容易產生疏漏風險，隨著人數增加，資料量大幅成長，完全用手算容易出現錯誤。若能結合程式進行驗證，可提高準確性與效率。
2. 部分中間步驟表達較複雜，有些表格在排版與說明上較難直觀理解，可加上更明確的圖例或顏色標示。
3. 從發現規律到嚴謹證明仍有距離，但若要再提升研究層級，可嘗試補上更嚴謹的數學證明過程。

(五) 研究結果與討論部分:

本研究的成果不只解決一個比賽問題，更探討出背後的數學結構與規律，

包括：

1. 推導出當 A 隊有 m 人，B 隊有 n 人 ($m > n$) 時的獲勝機率公式。
2. 推導出在獎金條件下，第一隊的參賽獎金期望值公式。
3. 推導出如果 A、B 兩隊人數相同對戰之方法數。
4. 發現當兩隊人數相同時，對戰方法數出現與帕斯卡三角形組合數高度相關。

在研究過程中發現原本的直覺多次被推翻，數學不能只靠感覺，一定要靠推理與驗證。

七、參考資料

(一)排列組合與基本概念（台灣高中數學課網）

<https://www.ceec.edu.tw>

(二)組合數學簡介（WIKI）

<https://zh.wikipedia.org/wiki/组合数学>

(三)樹狀圖與機率應用（數學教學平台）

<https://mathcrackers.com>