

彰化縣 114 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別：

☒ 國小組

☐ 國中組

☒ 數學類

☐ 自然、科技類

☐ 人文社會類

作品名稱：不靠運氣靠實力，21 點小玩家的進化之路

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件

第一階段 研究訓練階段

壹、近二年學校獨立研究課程之規劃

學期 \ 年級	五年級	六年級
上學期	獨立研究	獨立研究
下學期	獨立研究	獨立研究

教學內容：

- 一、培養基本研究能力，學習研究方法與應用。
- 二、文章重點節錄與歸納分析。
- 三、相關文書處理軟體的學習與操作。
- 四、成果發表分享與觀摩學習。
- 五、參考歷年獨立研究得獎作品並評析討論。
- 六、尋找有興趣的主題進行討論，並著手擬訂計畫。
- 七、蒐集閱讀資料，思考分析彙整素材。
- 八、研究報告的撰寫與檢討反思。

貳、學校如何提供該生獨立研究訓練

- 一、分年級階段規劃獨立研究基礎能力課程，依照學生興趣引導探索相關問題，針對有興趣的內容討論其成為獨立研究主題的可行性。
- 二、在不斷地討論中修正溝通表達，培養該生積極主動的學習態度，注重思辨能力及邏輯性，進而找到最佳解而非最速解。
- 三、提供獨立研究相關訊息。

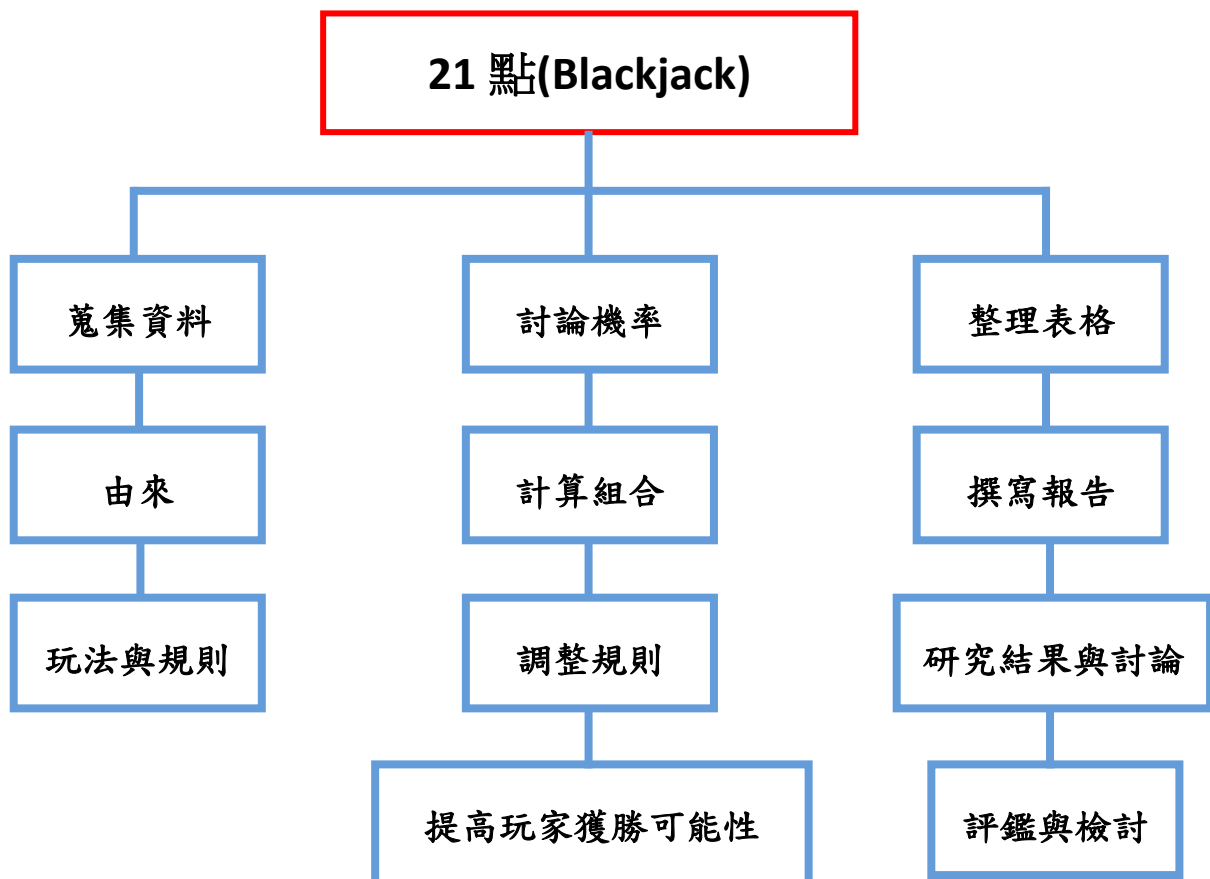
第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

我們平常就很喜歡玩撲克牌，尤其是那種要抽牌的遊戲。過年時，常常會和親戚朋友玩這個遊戲，但發現往往都是當莊家的人會贏。我們覺得 21 點這個遊戲很適合當作我們的研究主題，也想多了解 21 點的小技巧。因此想試試看用數學分析遊戲的機率，讓玩家在當下能做出比較好的選擇，並嘗試修改規則，減少莊家的優勢，提高玩家方面的勝率。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一) 擬定正式計畫



(二)研究問題

1. 玩家在不同點數（例如 16 點、17 點、18 點）時，再要一張牌超過 21 點的機率是多少？
2. 有哪些點數組合時「一定要停牌」或「一定要要牌」？
3. 找出在不同情況下要牌或停牌的最佳策略
4. 關於「算牌法」，我們能用什麼簡單方法來記住大牌(10、11、12、13、A)、小牌(2、3、4、5、6)出現的次數？
5. 要怎麼調整玩法讓玩家能提高獲勝率？

(三)工作進度表

月份 項目	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
尋找討論主題							
擬定研究問題							
蒐集資料							
整理資料							
計算組合機率							
修改規則							
研究結果							
評鑑與檢討							
調整修改報告							

三、彙整相關文獻

(一) 21 點(blackjack)的起源

21 點的前身是在西元 1700 年左右起源於法國賭場的「Vingt-et-Un」(法文中 21 之意)。這款遊戲所使用的牌組與現代的二十一點非常相似，但規則有所不同。到了 1800 年代，Vingt-et-Un 傳入美國並逐漸演變成現今的 Blackjack。起初，二十一點在美國並不流行，為了吸引賭客參與，賭場推出了各種額外獎金制度。其中之一的額外獎金是當玩家手中同時擁有黑桃 A 與黑色的 J(黑桃 J 或梅花 J)，就能獲得額外獎金。這種組合被稱為「Blackjack」。雖然這項獎勵後來被取消，但「Blackjack」這個名稱卻保留下來，成為遊戲的正式名稱。

(二) 21 點最基本的規則有哪些？（這些規則都是在不使用籌碼的前提下說明）

21 點是和莊家比牌面點數總和較高者獲勝，其點數必須等於或低於 21 點，每位玩家和莊家的點數比較，都是分別計算的。

1. 21 點常見用詞(有附圖)：

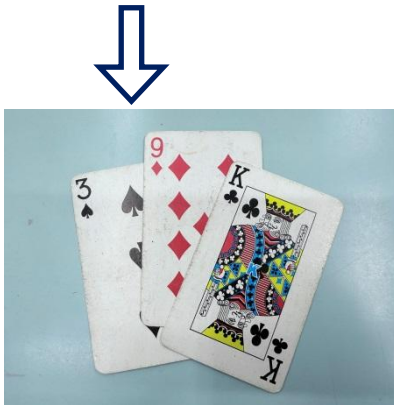
- (1) Blackjack：當一開始莊家發給你的牌分別是 A 跟點數是 10 的牌時，就稱為 Blackjack，並且直接獲勝(如右圖)。



- (2) 手牌：莊家或玩家手上所擁有的牌（如右圖）
左：玩家牌 / 右：莊家牌



(3)爆牌：手牌點數總和超過 21 點的稱為爆牌（如下左圖）。



(4)平手：莊家和玩家牌總點數一樣的話，就是平手(如上右圖)。

(5)要牌(加牌)：當莊家詢問玩家是否要牌時，向莊家要一張牌。

(6)停牌：當莊家詢問玩家是否再要牌時，停止要牌。

(7)明牌：翻開來牌面朝上的牌。(8)暗牌：蓋起來牌面朝下的牌。

(如右圖)



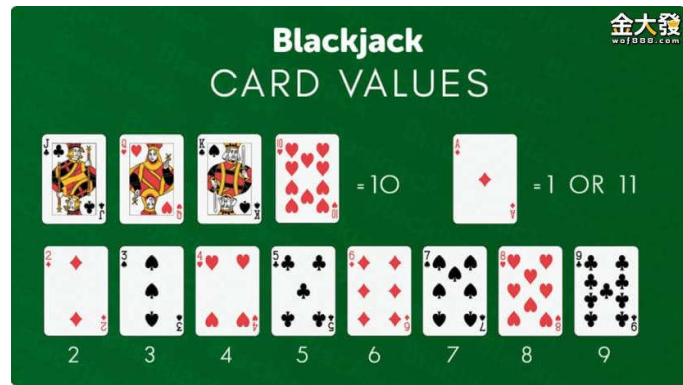
(如左圖)

(9)過五關：如果玩家拿牌五張而沒有爆牌就叫做過五關，如果是莊家過五關，那不管其他玩家的手牌點數如何，就都算輸給莊家，而過五關的大小是 $\text{Blackjack} > \text{過五關} = 21$ 點（如下圖示）。



2. 牌面點數：

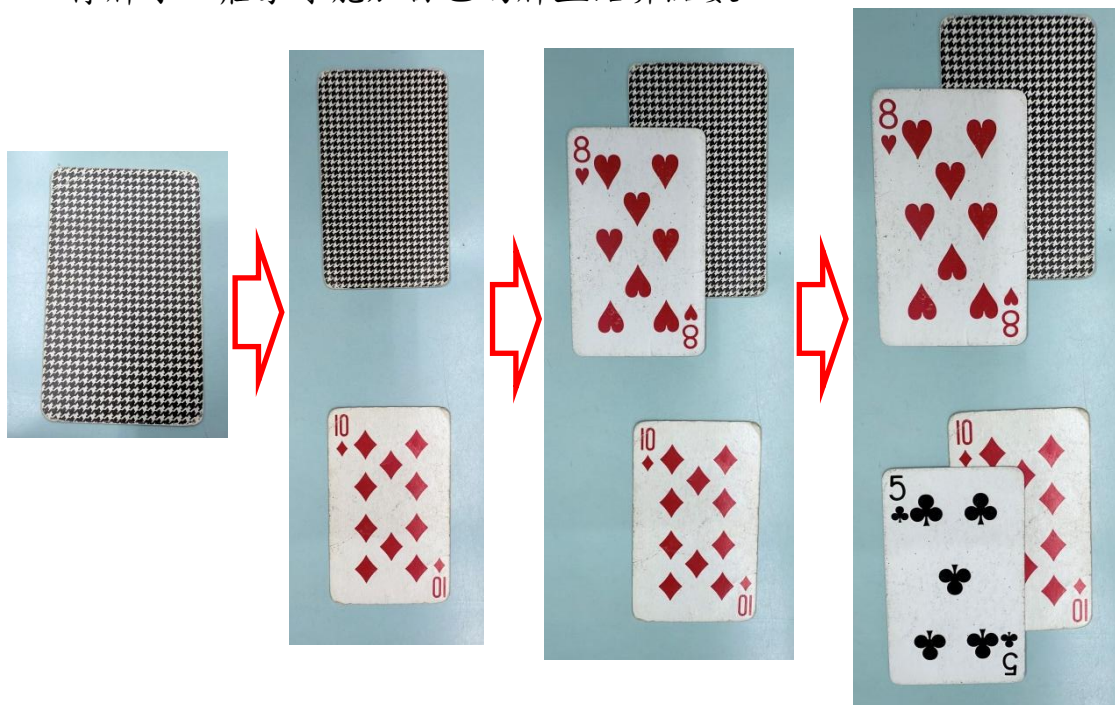
2 點至 10 點的牌以牌面的點數計算，J、Q、K 都視為 10 點。A 可記為 1 點或 11 點（如右圖示）。



3. 莊家限制：莊家在取得 17 點之前”必須”要牌，莊家補牌補到 17 點以後就不能補牌了，並且莊家手牌兩張需要蓋住一張。

4. 遊戲流程(圖如下)：

莊家負責發牌，莊家會先發給自己一張暗牌，接著莊家以順時鐘方向向各玩家各發一張明牌，之後再發一張明牌給自己。發完之後，莊家會以順時鐘方向詢問玩家是否再要牌，當第一位玩家停止要牌或是爆牌才詢問下一位玩家是否要牌，等所有玩家都停牌了，莊家才能加自己的牌並結算點數。



我們在網路上找到常用的
21 點基本策略表（如右圖）

右圖基本策略表中字母所代表的意思如下：

Your Hand(藍框處)=你的手牌
總和

S(Stand)=停牌、不再要牌

D(Double)=雙倍下注並再拿一張牌

P (Split) = 分牌(擁有兩張一樣的牌時可選擇分牌，做法是把兩張牌分開加牌，籌碼也分開計算，會有雙倍獲利的機會)

舉例來說，當你的手牌總和是 13~16 時(黃框處)，看到莊家的明牌是 2~6，因為莊家的牌不大，並且加牌也有一定的爆牌風險，所以通常會理性選擇停牌。而當莊家的明牌是 7~A，莊家的牌直接比你的手牌大的機率很高，所以就算有一定風險，還是得要牌，不然就輸定了。

[illegible]

(四) 能用什麼方法來記住大牌和小牌大概的出現次數？

有一種最普遍的「high-low」算牌法，算牌法是透過簡單的心算方法，透過觀察牌桌上所有人的明牌，你能迅速判斷目前的牌堆是否對自己有利。算牌方法如下：

小牌	2、3、4、5、6	+ 1
中牌	7、8、9	0
大牌	10、J、Q、K、A	- 1

如果最後是負數，代表已經發出來的牌較多是大牌，接下來拿到小牌的機率比較大，反之如果是正數，代表剩下的牌較多的是大牌，長期下來，使用這種方法就能有效降低風險、提高獲勝的機會。

四、資料分析

(一) 玩家手牌的排列組合

1. 為了能夠計算出玩家手牌是兩張或三張牌時，再補一張牌會大於、小於或等於 21 點的機率，我們需先列出玩家手牌有兩張及三張時的各種排列組合，整理成下列表格。

✖需要特別注意的是：因為 A 在 21 點遊戲中可以當 1 點或 11 點，為了更明確區別，在表格裡會直接用數字表示，且 10 點包括了牌面上的 10、J、Q、K。

2. 以下是玩家手中有兩張牌時的可能組合：

(10 點以下不列出排列組合是因為再要第三張牌後也不會超過 21 點，所以不用討論)

手牌兩張點數總和 = 11 的可能組合			
1、10	2、9	3、8	4、7
5、6			

手牌兩張點數總和 = 12 的可能組合			
11、1	2、10	3、9	4、8
5、7	6、6		

手牌兩張點數總和 = 13 的可能組合			
11、2	3、10	4、9	5、8
6、7			

手牌兩張點數總和 = 14 的可能組合			
11、3	4、10	5、9	6、8
7、7			

手牌兩張點數總和 = 15 的可能組合			
4、11	5、10	6、9	7、8

手牌兩張點數總和 = 16 的可能組合			
5、11	6、10	7、9	8、8

手牌兩張點數總和 = 17 的可能組合			
6、11	7、10	8、9	

手牌兩張點數總和 = 18 的可能組合			
7、11	8、10	9、9	

手牌兩張點數總和 = 19 的可能組合			
8、11	9、10		

3. 以下是玩家手中有三張牌時的可能組合：

手牌三張點數總和 = 11 的可能組合			
1、1、9	1、2、8	1、3、7	1、4、6
1、5、5	2、2、7	2、3、6	2、4、5
3、3、5	3、4、4		

手牌三張點數總和 = 12 的可能組合			
1、1、10	1、2、9	1、3、8	1、4、7
1、5、6	2、2、8	2、3、7	2、4、6
2、5、5	3、3、6	3、4、5	4、4、4

手牌三張點數總和 = 13 的可能組合			
11、1、1	1、2、10	1、3、9	1、4、8
1、5、7	1、6、6	2、20、9	2、3、8
2、4、7	2、5、6	3、3、7	3、4、6
3、5、5	4、4、5		

手牌三張點數總和 = 14 的可能組合			
11、1、2	1、3、10	1、4、9	1、5、8
1、6、7	2、2、10	2、3、9	2、4、8
2、5、7	2、6、6	3、3、8	3、4、7
3、5、6	4、4、6	4、5、5	

手牌三張點數總和 = 15 的可能組合			
11、1、3	11、2、2	1、4、10	1、5、9
1、6、8	1、7、7	2、3、10	2、4、9
2、5、8	2、6、7	3、3、9	3、4、8
3、5、7	3、6、6	4、4、7	4、5、6
5、5、5			

手牌三張點數總和 = 16 的可能組合			
11、1、4	11、2、3	1、5、10	1、6、9
1、7、8	2、4、10	2、5、9	2、6、8
2、7、7	3、3、10	3、4、9	3、5、8
3、6、7	4、4、8	4、5、7	4、6、6
5、5、6			

手牌三張點數總和 = 17 的可能組合			
11、3、3	11、2、4	11、1、5	1、6、10

1、7、9	1、8、8	2、5、10	2、6、9
2、7、8	3、4、10	3、5、9	3、6、8
3、7、7	4、4、9	4、5、8	4、6、7
5、5、7	5、6、6		

手牌三張點數總和 = 18 的可能組合			
11、2、5	11、3、4	11、1、6	1、7、10
1、8、9	2、6、10	2、7、9	2、8、8
3、5、10	3、6、9	3、7、8	4、4、10
4、5、9	4、6、8	4、7、7	5、5、8
5、6、7	6、6、6		

手牌三張點數總和 = 19 的可能組合			
11、1、7	11、2、6	11、3、5	11、4、4
1、8、10	1、9、9	2、7、10	2、8、9
3、6、10	3、7、9	3、8、8	4、5、10

4、6、9	4、7、8	5、5、9	5、6、8
5、7、7	6、6、7		

(二) 玩家補牌機率表

- 由上面的排列組合算出，21 點開局時玩家兩張手牌加總是 11~19 點，再補第三張牌會小於、等於、大於 21 點的機率表整理如下：

兩張牌 總和 情況	11	12	13	14	15
>21	0%	31.67%	39.2%	46.8%	54%
=21	31.6%	7.67%	7.6%	7.2%	7.5%
<21	68.4%	60.67%	53.2%	46%	38.5%

兩張牌 總和 情況	16	17	18	19
>21	61%	68.67%	76.67%	85%
=21	7.5%	8%	8%	8%
<21	31.5%	23.33%	15.33%	7%

2. 由上面兩張橘色表格的數據可知，當玩家手牌是 11 點時，拿到 21 點的機率最高，接近三分之一(如上表紅框處)，是因為 10、J、Q、K 都可以當 10 點來使用，11 點加上 10 點剛好 21 點，所以拿到 21 點的機率才會那麼高。

3. 玩家手牌的點數每增加 1 點，爆牌的機率就增加大約 8%，理性分析下建議如果手牌有兩張牌總合是 15 點以上的話就不要補牌了，因為當手牌有兩張牌時總合是 15 點爆牌的機率已經超過 50%了(如上表藍框處)，除非是非常想要賭運氣的玩家可能還是會選擇再補牌。

4. 以下是玩家手牌有三張牌，總和是 11~19 點時，再補第四張牌

三張牌 總和 情況	11	12	13	14	15
>21	0%	32.48%	40.35%	48.02%	55.58%
=21	40.82%	7.99%	7.85%	7.75%	7.56%
<21	59.18%	59.52%	51.8%	44.22%	36.85%

三張牌 總和 情況	16	17	18	19
>21	62.79%	69.39%	76.76%	84.82%
=21	7.44%	7.48%	7.71%	7.82%
<21	29.77%	23.13%	15.54%	7.37%

由上面藍色表格中數據可知，和上一張橘色表格相比較，當玩家手牌是 11 點時，拿到 21 點的機率竟然高達 40%(如紅框處)！而爆牌的機率跟橘色表格幾乎一樣，手牌點數總和每增加一點也是大約增加了 8%。如果玩家的手牌點數總和已是 15 點以上時，一樣建議就不要再要牌了，因為超過 21 點的機率也是超過 50%，所以輸給莊家的機率就變高了。

五、研究結果與討論

(一)提高玩家勝率---

方法一：調整不利莊家的規則

我們修改了莊家規則，把原本莊家 17 點以上不能要牌上調至 18 點，並依照修改後的規則製作出基本策略表(如下圖)。

✳因為不探討使用籌碼的部分，所以只有 H=要牌 和 S=停牌

[illegible]

1. 當玩家手牌總和是 5~11 時，因為無論拿到什麼牌都不會爆牌，所以選擇要牌。
2. 當玩家手牌總和是 12，在莊家的明牌是 5~7 時，應選擇停牌，因為莊家的暗牌是 10 的機率非常高(因為 10、J、Q、K 的牌面點數都算是 10)，而 15 以上再要牌會爆牌的機率超過了 50%，莊家再要牌時有很高的機率會超過 21 點，所以選擇停牌，但是莊家的明牌是 8 以上時，假如他的牌總和是 18，便不能加牌，所以就算玩家有一定的風險，還是建議選擇要牌提高勝率。
3. 當玩家手牌總和是 13~17，在莊家的明牌是 2~7 時，因為玩家的牌並不小，而莊家再加一張牌就有可能超過 21 點，所以就建議玩家選擇停牌。
4. 當玩家手牌總和已是 18 以上，因爆牌機率都高達 70% 以上，而且莊家加到 18 點就必須停牌，點數超越玩家的機率不高，所以就算莊家明牌點數很高，還是建議玩家選擇停牌。

(二)提高玩家勝率---

方法二：調整為玩家有利的條件

我們把玩家原本的「過五關」規則修改成「過四關」，也就是玩家手中持有四張牌並且沒有爆牌，大小就等於一般的 21 點，以下是我們把玩家過五關和過四關的平均機率製成比較表格：

手牌總和是 11

牌面總和 \ 情況	四張牌時再要一張	三張牌時再要一張
>21	0%	0%
=21	33.33%	40.82%
<21	66.67%	59.18%

手牌總和是 12

牌面總和 \ 情況	四張牌時再要一張	三張牌時再要一張
>21	33.33%	32.48%
=21	8.19%	7.99%
<21	58.47%	59.52%

手牌總和是 13

牌面總和 \ 情況	四張牌時再要一張	三張牌時再要一張
>21	41.44%	40.35%
=21	8.10%	7.85%
<21	50.46%	51.8%

手牌總和是 14

牌面總和 \ 情況	四張牌時再要一張	三張牌時再要一張
>21	49.46%	48.02%
=21	7.97%	7.75%
<21	42.57%	44.22%

手牌總和是 15

牌面總和 \ 情況	四張牌時再要一張	三張牌時再要一張
>21	57.85%	55.58%
=21	7.66%	7.56%
<21	34.46%	36.85%

1. 當玩家手牌總和是 11 點時，不論是三張牌再要一張，或是四張牌再要一張，爆牌的機率都是 0%。但是在補牌後拿到 21 點的平均機率，三張牌再要一張的機率高達 40.82%，明顯高於四張牌再要一張的 33.33%，兩者相差 7.49%。然而過五關在點數大小上的判定與一般 21 點相同，因此在手牌為 11 點的情況下，過五關與過四關的整體勝率其實不會有太大的差異。
2. 當玩家手牌總和為 12~15 點時，三張牌再要一張和四張牌再要一張中，獲得 21 點的平均機率都是比四張牌再要一張較高，不過兩者的差距都在 1% 以內，所以影響不大。然而，在超過 21 點的平均機率方面，三張牌再要一張則比四張牌再要一張低約 1~2%。由此可知，將過五關改為過四關雖然整體差異不大，但還是可以降低爆牌風險、提高玩家的勝率約 2%，進而提升玩家與莊家之間的公平性。

六、評鑑與檢討

1. 研究初期

遇到的最大問題是「不知道要從哪裡開始」，雖然我們選了 21 點這個主題，但查資料時發現內容很多，有規則、策略、機率等等，看得我們有點無從下手。剛開始想做機率計算時，也因為細部規則沒有完全弄懂，常常算到一半就發現前面出錯，只好重新來過，這些瓶

頭讓我們一開始進度很慢，但也有一些意外的收穫。我們發現，要先把基本概念整理清楚，再把問題拆分成小部分就不會覺得那麼困難。

2. 研究中期

我們要用數學研究 21 點其實有困難，因為要用國小的數學程度去研究 21 點，而且還要撇掉籌碼不算進去，對我們來說是難上加難。在算排列組合時，常常會因為一個組合算錯就要全部重來，有時候真的很想放棄，感覺怎麼算都算不好，所以其實是需要很多耐心的。我們在重複查資料和修正錯誤的過程中，我們慢慢學會如何挑選更可靠的資訊，也更能看懂原本覺得很難的內容。這些好的發現讓我們後面研究起來順利多了，也對自己的研究越來越有信心。

3. 研究後期

到了研究的後期我們開始討論規則的調整。一開始很快就提出了一個可行的修改方案，但接下來修改第二個規則時卻遇到了大難題，只要變動其他規則，大多會破壞莊家與玩家之間的平衡，想提高玩家勝率，又不能完全偏向玩家，因為必輸的莊家一定沒人要玩吧。

這個問題讓我們困擾了相當長一段時間，在經歷了一輪又一輪的討論後才想到了將「過五關」修改成「過四關」這個兼顧玩家勝率及遊戲公平性的微調。除此之外，我們還遇到了交件前一週剛好碰上運動會補假，所以報告做不完的問題。那幾天我們真的有點緊張，所以我們自願在學校留下來加課，進度才勉強趕上，在大家一起努力下我們順利完成了報告，也產生了滿滿的成就感，獨立研究總是痛苦與成長交織的一個過程。

七、參考資料

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E4%BA%8C%E5%8D%81%E4%B8%80%E9%BB%9E>

<https://www.stockfeel.com.tw/21%E9%BB%9E-%E7%B7%9A%E4%B8%8A%E5%8D%9A%E5%BC%88-%E5%A8%9B%E6%A8%82%E5%9F%8E/>

<https://www.wof888.com/post/21blackjack230921>

<https://blog.qywin88.com/all-articles/board/21-count/>

https://ourdating-blackjack.blogspot.com/p/21_3711.html

https://www.taaze.tw/products/11100012360.html?srsltid=AfmB0opn-50YEmL-YTpN_AflnKai9VbF7m5tsH1EJo0NMfrLpxfFrFZr

參考書籍---單挑 21 點:21 點高手就是你 / 作者:許博智 / 出版社:
大堯文化 2008