

彰化縣 113 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

☐國小組

☒數學類

☐自然、科技類

☒國中組

☐人文社會類

組別：

作品名稱： 分珠分組大學問

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校資優教育規劃，有七、八、九年級皆安排每周一節獨立研究課程，讓同學逐步了解何謂研究，如何設計研究，實際執行研究，如何將研究書寫成一份書面報告，以及在研究發表日前如何摘要整份研究製作成 PPT，並同時訓練同學們的發表能力。

資優生在這堂課課程中，必須多關注周遭的人事時地物的變化，從中找尋可以研究的素材，藉此主動關心本土與國際議題，培養社會責任感與公民意識，並從中選定能引起自己研究動機的研究主題。在執行研究的過程中，正是獨立研究執行高層次思考的核心階段，會有許多失敗的挫折，但有教師在旁引導，帶領學生一步步發覺其他方面的可能性，並從不同變素中微調並繼續前進。

在每周一節資優獨立研究課程中，特教組安排兩到三位學生搭配一位指導教師，本校大多數學生更傾向於共同完成一份研究相較於個人執行一份，這也可以讓學生們建構與他人的溝通、分享、互惠討論之能力，有同儕一起可以在偶遇研究困頓時，擁有友誼的加持，使其堅持到底。

本組是三位九年級同班數理資優生的作品，除了獨立研究課程為平常的抽離課之外，三位資優生工作處理效能佳，常常能夠將普生兩節需要完成的事項，他們能集中成一節課並將多餘的一節課作為發展獨立研究用途，並會利用第八節課彈性時間至資優教室執行研究，態度積極，研究有小結論所獲時，會非常興奮與彼此分享與討論，以本篇來說指導教師僅有引導輔助角色，歷程與結論皆是完全是同學們的研究發現。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

研究所需問題解決能力、自我引導學習能力、時事人文的閱讀涉略、理化實驗操作的涵養、善用數學繪圖工具能力、GOOGLE 表單

設計能力、摘要核心重點能力、分析異同口頭表述能力...等，皆是完成一份獨立研究不可或缺的能力。因此，在七、八年級的資優課程中，透過以下多元課程，同步培育資優生成為一位科研新鮮人必須具備的各項知能。

（一）週六主題課程

每學期訂定一種主題，譬如密室逃脫，並以其主題情境為發想結合國、英、數、自、社、資訊...等各科設計關卡，讓七八年級兩屆資優生混和上課，具合作與競賽的歷程，激發同學們的學習動機，因為週六外加課程，因此不會囿限於平時抽離課程的既定規範進度壓力，授課教師大多都會多給予同學發表展現自己小組討論結果的空間，多元的評量讓不同長處的同学被看見。

（二）寒假資優營隊

這是一項完整知識講述與實作執行兩項完美結合的課程，啟迪同學學以致用，課程內容豐富，面向多元。

資優班利用每年寒假對七年級資優生，以本校資優班特色課程「天文」為主軸，從自古以來天文在文學中的不斷演進、天文望遠鏡及天球儀的實作及其原理、登山風險意識管理以及每日早晨體能訓練的培訓、數學軟體GGB繪製星空圖的實作，最後以兩天一夜登上海拔2862公尺的塔塔加鹿林前山天文台的參訪，讓資優生體驗要成為優秀的天文科學人才需要面對的各項挑戰。

（三）暑假資優區域方案

特教組兩年一次申請區域資優方案計畫，讓本校資優生有機會與彰化縣他校資優生擁有一起交流學習機會，課程為進階加深加廣的天文專業，並結合社區服務概念，參與的八九年級資優生必須合

力執行夜間社區天文推廣服務，從宣傳海報製作、主持音控、小關卡製作、天文望遠鏡實作引導民眾皆由資優生們一手包辦。

（四）資優班校外教學

在每學年的下學期，會辦理一至兩天不等的七八九年級資優生校外教學，讓資優生透過走出教室，閱歷平常在校內講述教育無法獲得的體驗與新知。並且在每年的上學期固定辦理至南港中研院 openhouse 進行參訪，從研究員演講、走訪胡適故居、實驗室開放導覽、互動性問答集點遊戲，皆讓資優生一步步更認識科學研究的本質與人文創作的情懷。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在課堂上，老師經常透過不同特殊的數學題來鍛鍊我們的數學思考。其中一道出自於 2023 青少年數學國際城市邀請賽初賽的題目因分組方式多樣，引發同學們的興趣。此題如下：

「一些重量不一定相同的珠子可以分成 3 堆，每一堆珠子的總重量都相同；也可以分成 4 堆，每一堆珠子的總重量都相同；也可以分成 5 堆，每一堆珠子的總重量都相同。請問：這些珠子至少有多少顆？」

這題數字變化多端，組合可能性也不能輕易思考出來。本組三位同學決定深入研究，試圖驗證各式分組方法的正確性。然而，初步討論 1~5 內的組合就發現解答與確認答案非常耗時。仔細分析題目條件後，我們發現它不僅僅只是因倍數問題而已。我們致力於找出此題合理解法，且希望能進一步系統性的分析這個題目，幫助自己也為後人提供參考，這成為本組的研究動機。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

（一）工作進度表

國一主要是修習研究方法，其中我們閱覽許多數學、自然、人文社會類型的歷屆優秀作品。國二才正式三人一起組隊，國二上大多在確立研究的題目，我們嘗試了許多不同的開放性的數學資優題型，有從課本延伸討論中選擇，也有從不同獨立研究、科展的評語中企圖延伸討論的問題，還有從我們平常正在練習的數學競賽試題中挑選，最後我們在八下快接近年底之時，發現了這個題目，於是我們正式開啟了這個研究，整體來說研究加上撰寫，大約花了一年的時間，帶給國二下至忙碌的國三生活增添了另一份充實感。

	尋找 主題	查閱 文獻	確定 主題	擬定 問題	開始 研究	歸納 結果	撰寫 報告
~2023. 12							
2024. 1							
2024. 2							
2024. 3							
2024. 4							
2024. 5							
2024. 6							
2024. 7							
2024. 8							
2024. 9							
2024. 10							
2024. 11							
2024. 12							

(二)研究問題

1. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 之結果
2. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 三者之間的關係
3. 探討 $G(m, n)$ 對於分組結果的影響
4. 探討 $F(m, n, o)$ 、 $G(m, n, o)$ 、 $H(m, n, o)$

三. 彙整相關文獻

作品名稱	文獻內容
科展-分堆問題的收斂性探討(第60屆科展國中組數學科)	從數量較多的那一堆拿出較少數量那堆的個數，將其放到數量較少的那堆，重複直到各堆顆數相等。 該科展作品讓我們在找 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 之規律時給了我們相關的靈感。
科學期刊-奇妙的分堆問題(科學教育月刊第394期)	在正整數分成數堆，使每堆正整數中不包含任何等差(比)數列。 該期刊讓我們在探討 $[m, n]$ 如何分組時有了拆散其中一項的概念。

四. 資料分析

(一) 名詞解釋

設有一堆不一定同重量的珠子，分成相同等重量的 m 組、 n 組時，

$F(m, n)$ 為當所有重量不一定相同的珠子，最少所需的珠子顆數

$G(m, n)$ 為當 $F(m, n)$ 成立時最大重量珠子所需的顆數

$H(m, n)$ 為當 $F(m, n)$ 成立時最大重量珠子的單位重量

$[m, n]$ 為當 $F(m, n)$ 成立時的分組情形

1. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 之結果

本組做了以下討論：

利用窮舉法找出規律

以規律列出一般項

討論 $G(m, n) \neq m$ 時的情況

本組將 $m=1\sim 10$ 時， $F(m, n)$ $G(m, n)$ $H(m, n)$ 之值列出並寫成通式

- (1) 先找出分成 m, n 堆重量皆相同時的總重，即為 $(m \times n)$ 單位
- (2) 接著找出分成 m 堆時每堆的重量為 n 單位；分成 n 堆時每堆的重量為 m 單位
- (3) 此時最重的珠子重量即為 m 單位
- (4) 分別討論重量為 m 單位的珠子顆數和其餘剩下的珠子種類
 - ◆ 思考兩顆相加等於 m 的排列組合
 - ◆ 思考三顆相加等於 m 的排列組合
 - ◆ 檢視方法：如有發現有兩顆以上的珠子，不論是在重量為 m, n 的組合中皆位於同一組即可將此些珠子之重量相加，形成一顆重量更重的珠子

以下本組所計算 $G(m, n)$ 最大的情況之結果：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(1, n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

當 $m=1, n=k(k \neq 0)$ 時， $F(m, n)=k, G(m, n)=k, H(m, n)=1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(2, n)$	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10

當 $m=2, n=2k+1(k \neq 0)$ 時， $F(m, n)=2k+2, G(m, n)=2k, H(m, n)=2$

當 $m=2, n=2k(k \neq 0)$ 時， $F(m, n)=2k, G(m, n)=2k, H(m, n)=2$

當 $m=2, n=1$ 時， $F(m, n)=2, G(m, n)=1, H(m, n)=1$

[1, 1]

當 $m=2, n=2$ 時， $F(m, n)=2, G(m, n)=2, H(m, n)=2$

[2, 2]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(3, n)$	3	4	3	6	7	6	9	10	9	12

當 $m=3, n=3k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=3k+3, G(m, n)=3k, H(m, n)=3$

當 $m=3, n=3k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=3k+4, G(m, n)=3k, H(m, n)=3$

當 $m=3, n=3k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=3k, G(m, n)=3k, H(m, n)=3$

當 $m=3, n=1$ 時, $F(m, n)=3, G(m, n)=3, H(m, n)=1$

[1, 1, 1]

當 $m=3, n=2$ 時, $F(m, n)=4, G(m, n)=2, H(m, n)=2$

[2, 2, 1, 1]

當 $m=3, n=3$ 時, $F(m, n)=3, G(m, n)=3, H(m, n)=3$

[3, 3, 3]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(4, n)$	4	4	6	4	8	8	10	8	12	12

當 $m=4, n=4k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=4k+4, G(m, n)=4k, H(m, n)=4$

當 $m=4, n=4k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=4k+4, G(m, n)=4k, H(m, n)=4$

當 $m=4, n=4k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=4k+6, G(m, n)=4k, H(m, n)=4$

當 $m=4, n=4k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=4k, G(m, n)=4k, H(m, n)=4$

當 $m=4, n=1$ 時, $F(m, n)=4, G(m, n)=4, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1]

當 $m=4, n=2$ 時, $F(m, n)=4, G(m, n)=4, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2]

當 $m=4, n=3$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=3, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 1, 1, 1]

當 $m=4, n=4$ 時, $F(m, n)=4, G(m, n)=4, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F(5, n)	5	6	7	8	5	10	11	12	13	10

當 $m=5, n=5k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=5k+5, G(m, n)=5k, H(m, n)=5$

當 $m=5, n=5k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=5k+6, G(m, n)=5k, H(m, n)=5$

當 $m=5, n=5k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=5k+7, G(m, n)=5k, H(m, n)=5$

當 $m=5, n=5k+4 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=5k+8, G(m, n)=5k, H(m, n)=5$

當 $m=5, n=5k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=5k, G(m, n)=5k, H(m, n)=5$

當 $m=5, n=1$ 時, $F(m, n)=5, G(m, n)=5, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=5, n=2$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=2, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 1, 1]

當 $m=5, n=3$ 時, $F(m, n)=7, G(m, n)=3, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 2, 2, 1, 1]

當 $m=5, n=4$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=4, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1]

當 $m=5, n=5$ 時, $F(m, n)=5, G(m, n)=5, H(m, n)=5$

[5, 5, 5, 5, 5]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F(6, n)	6	6	6	8	10	6	12	12	12	14

當 $m=6, n=6k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k+6, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=6k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k+6, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=6k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k+6, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=6k+4 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k+8, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=6k+5 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k+10, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=6k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=6k, G(m, n)=6k, H(m, n)=6$

當 $m=6, n=1$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=6, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=6, n=2$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=6, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 2, 2]

當 $m=6, n=3$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=6, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 3, 3, 3]

當 $m=6, n=4$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=2, H(m, n)=4$

[2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]

當 $m=6, n=5$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=5, H(m, n)=5$

[5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=6, n=6$ 時, $F(m, n)=6, G(m, n)=6, H(m, n)=6$

[6, 6, 6, 6, 6, 6]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(7, n)$	7	8	9	10	11	12	7	14	15	16

當 $m=7, n=7k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+7, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+8, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+9, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k+4 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+10, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k+5 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+11, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k+6 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k+12, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=7k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=7k, G(m, n)=7k, H(m, n)=7$

當 $m=7, n=1$ 時, $F(m, n)=7, G(m, n)=7, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=7, n=2$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=6, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1]

當 $m=7, n=3$ 時, $F(m, n)=9, G(m, n)=6, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]

當 $m=7, n=4$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=4, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]

當 $m=7, n=5$ 時, $F(m, n)=11, G(m, n)=5, H(m, n)=5$

[5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 1, 1]

當 $m=7, n=6$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=6, H(m, n)=6$

[6, 6, 6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=7, n=7$ 時, $F(m, n)=7, G(m, n)=7, H(m, n)=7$

[7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(8, n)$	8	8	10	8	12	12	14	8	16	16

當 $m=8, n=8k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+8, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+8, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+10, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+4 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+8, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+5 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+12, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+6 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+12, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k+7 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k+14, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=8k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=8k, G(m, n)=8k, H(m, n)=8$

當 $m=8, n=1$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=8, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=8, n=2$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=8, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

當 $m=8, n=3$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=6, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1]

當 $m=8, n=4$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=8, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]

當 $m=8, n=5$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=5, H(m, n)=5$

[5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1]

當 $m=8, n=6$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=6, H(m, n)=6$

[6, 6, 6, 6, 6, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

當 $m=8, n=7$ 時, $F(m, n)=14, G(m, n)=7, H(m, n)=7$

[7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=8, n=8$ 時, $F(m, n)=8, G(m, n)=8, H(m, n)=8$

[8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(9, n)$	9	10	9	12	13	12	15	16	9	18

當 $m=9, n=9k+1 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+9, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+2 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+10, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+3 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+9, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+4 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+12, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+5 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+13, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+6 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+12, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+7 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+15, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k+8 (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k+16, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=9k (k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=9k, G(m, n)=9k, H(m, n)=9$

當 $m=9, n=1$ 時, $F(m, n)=9, G(m, n)=9, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=9, n=2$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=8, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1]

當 $m=9, n=3$ 時, $F(m, n)=9, G(m, n)=9, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]

當 $m=9, n=4$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=8, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1]

當 $m=9, n=5$ 時, $F(m, n)=13, G(m, n)=5, H(m, n)=5$

$[5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1]$

當 $m=9, n=6$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=6, H(m, n)=6$

$[6, 6, 6, 6, 6, 6, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$

當 $m=9, n=7$ 時, $F(m, n)=15, G(m, n)=7, H(m, n)=7$

$[7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1]$

當 $m=9, n=8$ 時, $F(m, n)=16, G(m, n)=8, H(m, n)=8$

$[8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

當 $m=9, n=9$ 時, $F(m, n)=9, G(m, n)=9, H(m, n)=9$

$[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(10, n)$	10	10	12	12	10	14	16	16	18	10

當 $m=10, n=10k+1(k \neq 0)$ 時,

$F(m, n)=10k+10, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+2(k \neq 0)$ 時,

$F(m, n)=10k+10, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+3(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+12, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+4(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+12, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+5(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+10, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+6(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+14, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+7(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+16, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+8(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+16, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k+9(k \neq 0)$

時, $F(m, n)=10k+18, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=10k(k \neq 0)$ 時, $F(m, n)=10k, G(m, n)=10k, H(m, n)=10$

當 $m=10, n=1$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=10, H(m, n)=1$

[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=10, n=2$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=10, H(m, n)=2$

[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

當 $m=10, n=3$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=9, H(m, n)=3$

[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]

當 $m=10, n=4$ 時, $F(m, n)=12, G(m, n)=8, H(m, n)=4$

[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2]

當 $m=10, n=5$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=10, H(m, n)=5$

[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]

當 $m=10, n=6$ 時, $F(m, n)=14, G(m, n)=6, H(m, n)=6$

[6, 6, 6, 6, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2]

當 $m=10, n=7$ 時, $F(m, n)=16, G(m, n)=7, H(m, n)=7$

[7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]

當 $m=10, n=8$ 時, $F(m, n)=16, G(m, n)=8, H(m, n)=8$

[8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

當 $m=10, n=9$ 時, $F(m, n)=18, G(m, n)=9, H(m, n)=9$

[9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

當 $m=10, n=10$ 時, $F(m, n)=10, G(m, n)=10, H(m, n)=10$

[10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]

本組發現到當 $G(m, n) \neq m$ 時也有解

EX :

(3, 4)

[3, 3, 3, 1, 1, 1] or [3, 3, 2, 2, 1, 1]

(3, 5)

[3, 3, 3, 1, 1, 1] or [3, 3, 2, 2, 1, 1]

(5, 7)

[5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 1, 1] or [5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1]

or [5, 5, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1]

2. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 三者之間的關係

在大量的計算分組過後，思考如果能找出三者間的關係，是否會有個漂亮的結果，於是便開始總結所發現一些較特別的情況，並根據已知的規律及條件寫出了合理的列式。

3. 探討 $G(m, n)$ 對於分組結果的影響

在一次次書寫驗算的過程中，本組逐漸了解到 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 對於結果的影響甚大，於是決定對其進行探討。本組利用推論的方法得到最重的珠子之顆數，並發現其規律。

4. 探討 $F(m, n, o)$ 、 $G(m, n, o)$ 、 $H(m, n, o)$

本組先將 m, n, o 三數分成兩種情況來討論：

情況一： $m \leq n \leq o$ 且其二或三者有整數倍關係時

令 $m=p, n=q, o=r (0 < p \leq q \leq r)$ 時

情況 1-1: $ap=r$

$F(m, n, o) = F(q, r), G(m, n, o) = G(q, r), H(m, n, o) = G(q, r)$

情況 1-2: $ap=bq=r$

$F(m, n, o) = r, G(m, n, o) = r, H(m, n, o) = r$

情況二：此情況本組以數據來分作為研究對象

情況 2-1 $m < n < o$ (m, n, o)=1, 在此以 (3, 4, 5) 為例：

- (1)先找出分成 3、4、5 堆重量皆相同時的最小總重, 即為
 $(3, 4, 5)=60$ 單位
- (2)接著找出分成 3 堆時每堆的重量為 20 單位($60 \div 3$)；分成 4 堆時每堆的重量為 15 單位($60 \div 4$)；分成 5 堆時每堆的重量為 12 單位($60 \div 5$)
- (3)此時最重的珠子重量即為 12 單位
- (4)分別討論重量為 12 單位的珠子顆數為 1、2、3 時其餘剩下的珠子種類
- ◆ 思考兩顆相加等於 12 的排列組合 例:3+9 4+8
 - ◆ 思考三顆相加等於 12 的排列組合 例:1+3+8 4+4+4
 - ◆ 檢視方法:如有發現有兩顆以上的珠子, 不論是在重量為 12、15、20 的組合中皆位於同一組即可將此些珠子之重量相加, 形成一顆重量更重的珠子(以此類推)本組所計算之結果:

$F(3, 4, 5)=9$, 會有以下結果

[1, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 11, 12]

or[3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 12]

or[1, 3, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 12]

- ★ 1, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 11, 12 (9 顆)
 分成 3 堆:8+12, 9+11, 1+3+4+6+6
 分成 4 堆:3+12, 4+11, 6+9, 1+6+8
 分成 5 堆:12, 1+11, 3+9, 4+8, 6+6
- ★ 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 12 (9 顆)
 分成 3 堆:3+5+12, 4+7+9, 6+6+8
 分成 4 堆:3+12, 6+9, 7+8, 4+5+6
 分成 5 堆:12, 3+9, 4+8, 5+7, 6+6

★ 1, 3, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 12 (9 顆)

分成 3 堆: $8+12, 3+5+12, 1+3+7+9$

分成 4 堆: $3+12, 3+12, 7+8, 1+5+9$

分成 5 堆: $12, 12, 3+9, 5+7, 1+3+8$

$F(3, 5, 7)=13$, 會有以下結果

$[2, 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 13, 15, 15, 15]$

or $[3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 9, 9, 15, 15, 15]$

or $[4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 15, 15]$

or $[2, 2, 2, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 13, 13, 15, 15]$

★ 2, 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 13, 15, 15 (13 顆)

分成 3 堆: $2+2+2+6+8+15, 6+7+7+15, 7+13+15$

分成 5 堆: $6+15, 6+15, 2+2+2+15, 7+7+7, 8+13$

分成 7 堆: $15, 15, 15, 7+8, 2+6+7, 2+6+7, 2+13$

★ 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 9, 9, 15, 15, 15 (13 顆)

分成 3 堆: $5+15+15, 5+6+9+15, 3+4+6+6+7+9$

分成 5 堆: $6+15, 6+15, 6+15, 3+4+5+9, 5+7+9$

分成 7 堆: $15, 15, 15, 6+9, 6+9, 3+5+7, 4+5+6$

★ 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 15, 15 (13 顆)

分成 3 堆: $5+15+15, 6+6+7+8+8, 4+6+7+9+9$

分成 5 堆: $6+15, 6+15, 6+15, 4+8+9, 5+7+9$

分成 7 堆: $15, 15, 7+8, 6+9, 6+9, 7+8, 4+5+6$

★ 2, 2, 2, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 13, 13, 15, 15 (13 顆)

分成 3 堆: $2+2+2+6+8+15, 7+7+8+13, 7+13+15$

分成 5 堆: $6+15, 2+2+2+15, 7+7+8+13, 7+13+15$

分成 7 堆: $15, 15, 2+13, 7+8, 2+6+7, 2+13, 7+8$

情況 2-2 $m < n < o$ 其二有共同非 1 之質因數時

$F(4, 5, 6)=11$, 會有以下結果

$[2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10]$

or $[2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10]$

★ $2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10$ (11 顆)

分成 4 堆: $2+3+10, 2+3+10, 4+5+6, 7+8$

分成 5 堆: $2+10, 2+10, 3+4+5, 4+8, 5+7$

分成 6 堆: $10, 10, 2+3+5, 2+8, 3+7, 4+6$

★ $2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10$ (11 顆)

分成 4 堆: $6+6, 10+2, 3+4+5, 4+8, 5+7$

分成 5 堆: $4+5+6, 2+3+10, 4+5+6, 7+8$

分成 6 堆: $4+6, 5+5, 10, 2+8, 3+7, 4+6$

★ $1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (11 顆)

分成 4 堆 $1+2+3+9, 4+5+6, 7+8, 5+10$

分成 5 堆: $1+5+6, 2+10, 3+9, 4+8, 5+7$

分成 6 堆: $1+9, 2+8, 3+7, 4+6, 5+5, 10$

五、研究結果與討論

1. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 之結果

當 $m=p, n=p \sim p+r (r < p)$ 時, $F(m, n)=p+F(m, r)$, $G(m, n)=p$, $H(m, n)=p$

當 $m=p, n=2p \sim 2p+r$ 時, $F(m, n)=2p+F(m, r)$, $G(m, n)=2p$, $H(m, n)=p$

當 $m=p, n=3p \sim 3p+r$ 時, $F(m, n)=3p+F(m, r)$, $G(m, n)=3p$, $H(m, n)=p$

(以此往復)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	18	18	20	20	22	22	24	24	26
3	3	4	3	6	7	6	9	10	9	12	13	12	15	16	15	18	19	18	21	22	21	24	25	24	27
4	4	4	6	4	8	8	10	8	12	12	14	12	16	16	18	16	20	20	22	20	24	24	26	24	28
5	5	6	7	8	5	10	11	12	13	10	15	16	17	18	15	20	21	22	23	20	25	26	27	28	25
6	6	6	6	8	10	6	12	12	12	14	16	12	18	18	18	20	22	18	24	24	24	26	28	24	30
7	7	8	9	10	11	12	7	14	15	16	17	18	19	14	21	22	23	24	25	26	21	28	29	30	31
8	8	8	10	8	12	12	14	8	16	16	18	16	20	20	22	16	24	24	26	24	28	28	30	24	32
9	9	10	9	12	13	12	15	16	9	18	19	18	21	22	21	24	25	18	27	28	27	30	31	30	33
10	10	10	12	12	10	14	16	16	18	10	20	20	22	22	20	24	26	26	28	20	30	30	32	32	30
11	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	22	33	34	35
12	12	12	12	12	16	12	18	16	18	20	24	12	24	24	24	24	28	24	30	28	30	32	36	24	36
13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	25	24	13	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	38	37
14	14	14	16	16	18	18	14	20	22	22	26	24	26	14	28	28	30	30	32	32	28	34	36	36	40
15	15	16	15	18	15	18	21	22	21	20	27	24	27	28	15	30	31	30	33	30	33	36	37	36	35
16	16	16	18	16	20	20	22	16	24	24	28	24	28	28	30	16	32	32	34	32	36	36	38	32	40
17	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	29	28	29	30	31	32	17	34	35	36	37	38	39	40	41
18	18	18	18	20	22	18	24	24	18	26	30	24	30	30	30	32	18	36	36	36	38	40	36	42	
19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	31	30	31	32	33	34	35	36	19	38	39	40	41	42	43
20	20	20	22	20	20	24	26	24	28	20	22	28	32	32	30	32	36	36	38	20	40	40	42	40	40
21	21	22	21	24	25	24	21	28	27	30	35	30	33	28	33	36	37	36	39	40	21	42	43	42	45
22	22	22	24	24	26	26	28	28	30	30	36	32	34	34	36	36	38	38	40	40	42	22	44	44	46
23	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	37	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	23	46	47
24	24	24	24	24	28	24	30	24	30	32	38	24	36	36	36	32	40	36	42	40	42	44	46	24	48
25	25	26	27	28	25	30	31	32	33	30	39	36	37	38	35	40	41	42	43	40	45	46	47	48	25

$F(m, n)$ 之結果

2. 探討 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ 三者之間的關係

當 $m=p, n=q$ ($0 < p \leq q$)時，

$$F(m, n) = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor p + F(m, q - \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor p), \quad G(m, n) = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor p, \quad H(m, n) = p$$

當 $m=p, n=p$ ($p \neq 0$)時， $F(m, n)=p, G(m, n)=p, H(m, n)=p$

當 $m=p, n=p(p \in \mathbb{N})$ 時， $F(m, n)=p, G(m, n)=p, H(m, n)=p$

當 $m=p, n=mp$ ， $F(m, n)=mp, G(m, n)=mp, H(m, n)=p$

3. 探討 $G(m, n)$ 對於分組結果的影響

令 $n = am+b$ ($n > b$)($a, b \in \mathbb{N}$)

$$F(m, n) = F(m, am) + F(m, b), \quad G(m, n) = G(m, am) = am, \quad H(m, n) = H(m, am) = m$$

在分成 $m, n(m \leq n)$ 兩種堆數時，先將 $G(m, n)$ 和 $H(m, n)$ 寫出會更加便於書寫

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	2	4	4	6	6	8	8	10
3	3	2	3	3	3	6	6	6	9	9
4	4	4	3	4	4	4	4	8	8	8
5	5	4	3	4	5	5	5	5	5	10
6	6	6	6	4	5	6	6	6	6	6
7	7	6	6	4	5	6	7	7	7	7
8	8	8	6	8	5	6	7	8	8	8
9	9	8	9	8	5	6	7	8	9	9
10	10	10	9	8	10	6	7	8	9	10

$G(m, n)$ 之結果

說明：在分成 $m, n(n=am+b)$ 兩種堆數時，分法為：

$m, m, \dots, m$ (共 am 個 m) + $[m, b]$

說明：當 $F(m, b)$ 成立，則分成 m 組，各組重量單位 b ；分成 b 組，各組重量單位 m 。補上 am 個重 m 單位的珠子後：

- (1) 分成 m 組，各組重 $am+b$ 單位，所補上的珠子 a 顆加上原本分成 m 組時的珠子為一組的珠子即可。
- (2) 分成 $n(am+b)$ 組，各組重 m 單位，所補上的珠子 1 顆為一組，剩餘 b 組則不變即可。

4. 探討 $F(m, n, o)$

上方為本組所寫出之 $F(m, n, o)$ 之解，因進度問題，尚未探討出 $F(m, n, o)$ 之結論，稍嫌可惜。

六、評鑑與檢討

(一)研究動機的學習

國中生寫分組問題時最常用的寫法就是窮舉法。我們第一眼看到題目也是先強行計算，一一討論各種分法的最小值，再與同學們互相驗證答案。但窮舉法所能寫的問題通常數字不能太大，否則會有一個嚴重弊端——太花時間。於是我們想到是否可以有系統的對原本需要窮舉法的題目進行探討，寫出一個簡單的式子，任憑條件如何改變都能快速求出最少顆數，因此我們便開始思考如何為這種題目找出一種較合理的解法，讓沒有其他特殊工具的我們也能從容應對這種題目。

(二)擬定正式計畫研究問題及工作進度表的學習

數學複雜多樣，導致本組在思考研究問題的過程中遇到諸多瓶頸，造成研究計畫及研究過程是並行。而這些問題使本組學會更妥善的分工和規劃時間，過程中使組員們產生一股向心力，以應對複雜多變的數學問題，也更加投入研究。但因工作分配與思考方向沒有規劃好，導致來不及完成後續研究，這也讓我們體悟到了先擬定計畫在執行的重要性。

(三)彙整相關文獻的學習

起初我們發現網路上查找相關文獻時，認為這會是一個全新的主題，不用考慮是否會重複他人研究。卻在研究過程中逐漸了解到沒有任何依據所造成的阻礙是如何的難以跨越，甚至幾度想更換主題，但想到有了些許結果就不想放棄，不能浪費前面的努力及不能辜負老師的用心還是努力完成了這份研究。這份研究讓我們學到了凡事都是一體兩面的，在也十分感謝老師在我們研究遇到瓶頸時願意提供的建議和協助，且為了我們願意付出自己的時間監督和指導我們。

(四)研究結果與討論的學習

在 m 和 n 還不算很大時，憑直覺分組是可行的。但 m 和 n 逐漸增加，如果繼續靠直覺，出錯的比例和浪費的時間便會提高，造成

許多無用的計算。於是我們嘗試將題目做整理後，思考如何尋找背後的原因，找出分組的規律，最後決定以固定其中一數 m 來探討規律。在後來為了做出更多結果而開始討論分成 m, n, o 三種組數時，打算藉由已知的條件做出更多的擴展，嘗試找出分成兩種堆數和分成三種堆數之間的關係。

七、未來展望

目前本組已能利用 $F(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $H(m, n)$ ，快速解決分成三組的問題（數字不能太大），但分成兩組和三組之間的鴻溝便如同二維平面與三維空間的差距。但透過對分兩組的研究經驗及耗費大量時間對分三組之問題的剖析，本組猜測其規律並非平面，而是可以透過立體圖形的方式進行觀察，找出其規律，並更進一步推導並驗證 $F(m, n, o)$ 、 $G(m, n, o)$ 、 $H(m, n, o)$ 之關係。如此一來，才算是對於原始題目的完整研究。期待後續本組或者有其他對於此類問題有興趣的人們，能順利解決以上問題並加深加廣，延續數學之美。

八、參考資料

2023 年青少年數學國際城市邀請賽 參賽代表遴選初賽 個人賽試題
<https://drive.google.com/file/d/1KVAa06NYeTdZRNfVfURvt80gE65JMclv/view>

中華民國 第 60 屆中小學科展 數學科 分堆問題之收斂性的探討
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/60/pdf/NPHSF2020-030407.pdf?325>

科學月刊(394 期)奇妙的分堆問題
[https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62563ff8381784d09345ba73/P27-34%20%20105009-%E5%A5%87%E5%A6%99%E7%9A%84%E5%88%86%E5%A0%86%E5%95%8F%E9%A1%8C\(%E6%9C%88%E5%88%8A\).pdf](https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62563ff8381784d09345ba73/P27-34%20%20105009-%E5%A5%87%E5%A6%99%E7%9A%84%E5%88%86%E5%A0%86%E5%95%8F%E9%A1%8C(%E6%9C%88%E5%88%8A).pdf)