

彰化縣 114 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

作品說明書

作品編號：

組別：

☒ 國小組

☐ 國中組

☒ 數學類

☐ 自然、科技類

☐ 人文社會類

作品名稱：三角終焉—三角殺棋殘局演算的勝負裁決

第一階段：

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校近三年積極推動科學教育，將「探究與實作」精神落實於校本課程與社團活動中，建構具系統性的科學研究培訓流程。學校每週三下午及假日開設「科學探索班」，以社團形式進行長期培訓，課程內容涵蓋探究方法、變因控制、資料分析、實驗設計與科學倫理等主題。

為落實此理念，學校在週三下午與假日開設「科學探索班」，以社團形式推動**帶狀課程**，結合探究歷程、創意實作與跨域統整。課程分為三個層次：

1. **基礎啟蒙階段**（國小中低年級）——著重觀察、記錄與簡單實驗操作，培養問題意識。
2. **主題探究階段**（國小高年級）——學習實驗設計、變因控制與資料蒐集，完成小型專題。
3. **獨立研究階段**（國中部）——以真實議題為本，進行長期研究或參與科展與獨立研究甄選。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

為培育具潛力學生的研究能力，學校採多層次輔導模式。首先，由指導教師進行科學方法與研究倫理訓練，透過「小組研討」「問題定義」「研究計畫撰寫」等實作課程，引導學生完成研究構想書與計畫書。其次，定期舉辦「研究成果分享會」與「模擬發表會」，讓學生練習口語表達與答辯技巧。

學校亦建置簡易實驗室與數位紀錄設備，提供學生進行量測、拍攝與數據分析的空間與工具。研究歷程全程由教師輔導與記錄，並鼓勵學生參與縣科展及獨立研究徵選，以競賽為導向培養系統化探究能力。整體而言，原斗國中小以長期課程、跨域合作與探究實作為核心，建立偏鄉學生也能逐步成長為具備研究素養與創新能力的學習者。

第二階段：

三角終焉－三角殺棋殘局演算的勝負裁決

摘要

本研究探討益智遊戲：「三角殺棋」，在不同規則下的獲勝策略，並嘗試建立可推廣的「可控殘局」與「應著」策略。「三角殺棋」與「尼姆（Nim）遊戲」同屬組合博弈類型的取石遊戲，然而「三角殺棋」取子方式可跨層、跨方向，且取子後可能將棋堆分割成多堆，因此「尼姆遊戲」判斷勝負的尼姆和（ $\oplus$ ）解法並不適用。現有研究多以電腦撰寫程式運算多層三角殺棋來判定勝負，但缺乏實際對局棋譜與完整「應著」策略，因此無法協助玩家理解「如何下才能贏」？本研究透過文獻蒐集、基礎案例分析以及數百場 4 層三角殺棋棋譜的紀錄與分類，歸納出 1~4 層三角殺棋的勝負情形與「可控殘局」類型。

在 1~3 層的「三角殺棋」分析中，可得到規則明確且可直接推導的勝負關係；進入 4 層三角殺棋後，勝負關鍵不再單純推判，因為曲子過程中，可能造成空間上的分割棋堆，造成無法維持控場。本研究依照殘局的棋堆形態判定是否屬於「可控殘局」。研究結果顯示，在不限取子數的「Normal 版本」規則中，後手（N）無論面對先手（P）任何取法，皆能「應著」使局勢導向四種類型的「可控殘局」，包括：（1,1,1,1）、（2,2）、（3/3,1,1）、（1,4）等型式，並最終取得勝利；而在「misère 版本」規則中，若不限取子數，先手可快速使盤面回到 3 層三角殺棋而必勝，故本研究提出將取子數限制為最多 3 顆，使「misère 版本」更具策略深度與可玩性。

本研究成功建立「可控殘局」，並根據棋譜推導出「應著」策略，補足三角殺棋缺乏棋譜分析的研究空缺，為後續更高層數的策略推論奠定基礎。

一、研究動機

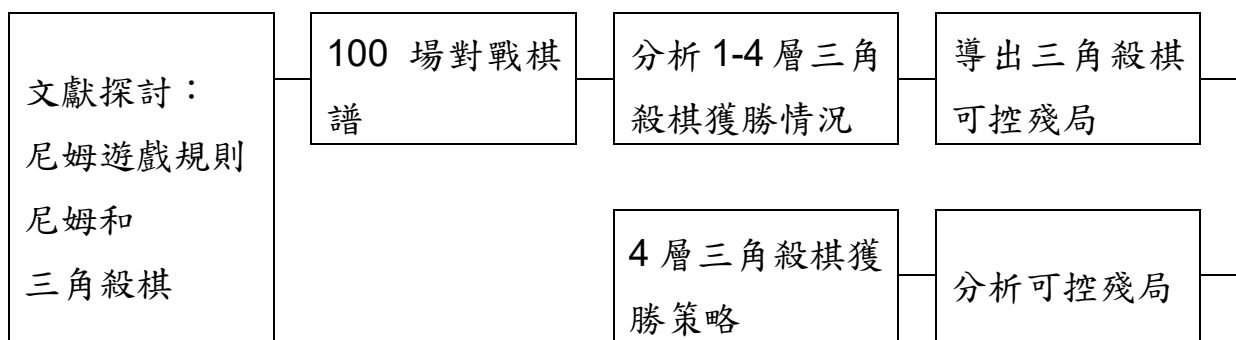
在學校科學探索社中，老師常以桌遊方式提升學習興趣和引導式的邏輯思考。有一個名為「三角殺棋」的益智遊戲，每次和老師對戰時，老師都很快就能取得勝利，老師到底怎麼做到的？

「三角殺棋」的規則看起來簡單，但其實對邏輯思考很有挑戰性。兩個玩家要輪流從棋盤上拿走棋子，至少要取走一顆，也可以拿取多顆相連棋子，如果輪到的玩家無棋可取，則輸掉這場遊戲，另一種變體規則，取到最後剩餘一顆棋子的玩家輸掉比賽。最如果用紙筆玩的話，就是在圓圈上畫線，而且也要連成一直線。這個遊戲和著名的尼姆遊戲（NIM）很相似，但更具變化性。

目前分析碩博士論文當中已發表研究文獻，例如八層三角殺棋之解法，八層三角殺棋之解法是用電腦來計算和分析完成，但是只能計算勝率以及邏輯判斷最終勝負，卻無法給出棋譜，終究無法得知如何取得勝利？本研究希望透過可控殘局，分析三角殺棋獲勝策略。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

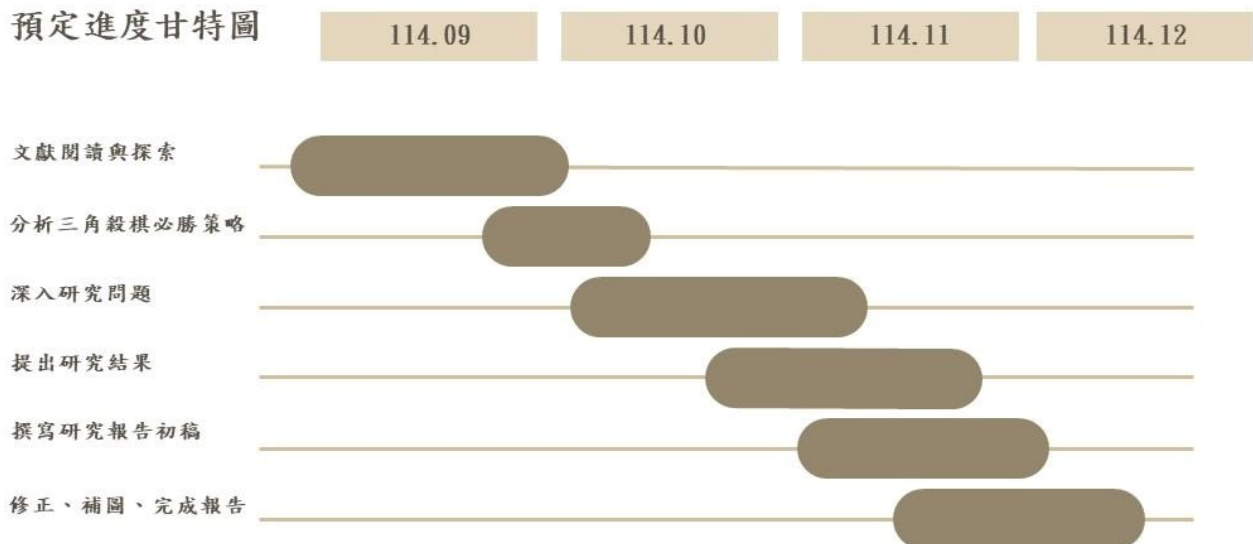
（一）、研究架構



(二)、工作進度表

工作進度表

預定進度甘特圖



三、彙整相關文獻

(一)、取子棋

取子棋（單堆尼姆），是一種古老的取石遊戲（Take-away game），來源已不可考。遊戲的一般規則（normal）定義：遊戲有若干棋子（石子），棋子的數量為 N ，兩名玩家輪流取棋子，規定每人最多拿取 K 個棋子（ $1 \sim K$ ，不能不拿），如果輪到某位玩家時，所有的棋子堆都已經被拿完了，則判為負（因為他此刻沒有任何合法的取棋子動作）。另有變體規則（misère）則是拿到最後一個棋子的人輸。取子棋是有解的遊戲，其解法如下：

例：共有 16 顆棋子，規定每人最多取走 4 顆，一般規則（normal）下，
第一個玩家（先手玩家 Previous，P）有必勝的策略：

∵兩位玩家輪流取子，若將 16 顆棋子分割為數堆，確定每堆棋子被取完至少為 2 個動作，且不能有 3 動作的可能，則局勢可控，若取完每堆棋子的動作為 1 動或 2 動，則局勢不可控。若要使分割的每堆棋子取完為可控場的 2 個動作，則每堆棋子數應為 5 顆（ $4+1$ ）（表 3-1）。

表 3-1、P、N 玩家輪流取子，棋堆的棋子數與取子動作勝負判別：

棋數	P、N 玩家輪流取子 (P,N,...)	取完動作數	Normal 規則
4	(4,0)	1 動	P 勝
	(3,1) / (2,2) / (1,3)	2 動	N 勝
5	(4,1) / (3,2) / (2,3) / (1,4)	2 動	N 勝
6	(4,1,1) / (3,2,1) / (3,1,2) / (2,3,1) / (2,2,2) / (2,1,3) / (1,4,1) / (1,3,2) / (1,2,3) / (1,1,4)	3 動	P 勝
	(4,2) / (3,3) / (2,4)	2 動	N 勝

∴16 顆棋子，每 5 顆一堆，可分為 3+1 堆，其中 3 堆有 5 顆，且這三堆取完棋子各有 2 動作（可控場），剩下 1 堆有 1 顆棋子，需要再 1 動作（額外動作）。因此，先手玩家（P）先取 1 顆棋子，剩下的棋子每 5 個

一堆，後手 (N) 取子完後，先手玩家 (P) 必定可以取子，使取子數和為 5，則先手必勝。

【取子棋判斷勝負通則】

Normal 規則下，若 $(k + 1) \mid N$ ，則後手 (N) 可控場，後手 (N) 勝



若 $N = (k + 1)d + n$ ， $d \in \mathbb{N}$ ， n 為餘數，則先手 (P) 先取走 n 顆，則先手 (P) 可控場，先手 (P) 勝



misère 規則下，則先手、後手控場易位。

(二)、尼姆 (Nim) 遊戲

尼姆 (Nim) 遊戲，又成為拈棋，起源可追溯到數百年前的中國與非洲傳統遊戲。尼姆 (Nim) 遊戲的一般規則「normal 版本」定義：有若干堆棋子 (石子)，每堆棋子的數量都是有限的，兩名玩家輪流取棋子，合法的取棋子的規則是輪到的玩家必須選擇其中一堆石子，並拿走若干顆 (不能不拿)；如果輪到某位玩家時，所有的棋子堆都已經被拿空了，則判為負 (因為他此刻沒有任何合法的取棋子動作)。另有變體規則「**misère 版本**」則是拿到最後一個棋子的人輸。

尼姆遊戲在數學上是已解遊戲，針對任意排數及個數的初始狀態都已有解法，而且有簡單的方式可以判斷哪一個遊戲者會勝利。由 Charles L. Bouton 在 1901 所提出：

定理：在「normal 版本」尼姆遊戲中，若各排棋子數的尼姆和不為零，第一個玩家(先手玩家 Previous, P)有必勝的策略，否則，第二個玩家(後手玩家 Next, N)有必勝的策略 (Bouton, 1901)。

若玩家 (P) 取子造成所有棋堆的尼姆和 $\oplus = 0$ ，則該局面是後手 (N) 必敗局(先手勝, P-position)，反之，若 $\oplus \neq 0$ ，則是必勝局(後手勝, N-position)，簡單來說，遊戲者只要保持每一次取子後，剩餘子數的尼姆和 $(\oplus) = 0$ ，則可以獲勝。

例：三堆石子：7, 4, 5

$$7 = 111_2$$

$$4 = 100_2$$

$$5 = 101_2$$

$$\text{計算尼姆和 } (\oplus) : (111_2 \oplus 100_2 \oplus 101_2) = 110_2 = 6$$

初始狀態 $\oplus \neq 0$ ，則先手 (P) 可取子，使剩餘棋堆 $\oplus = 0$ ，則先手 (P) 可控場，先手 (P) 勝。

以上述為例，先手 (P) 可自第一堆 7 顆棋子中取走 6 顆，則此時三堆棋子 $\oplus = 0$ ，無論後手 (N) 如何取子，必定破壞 $\oplus = 0$ 產生 $\oplus \neq 0$ 的狀態，則輪到先手 (P)，可經由取子使局面再次回到 $\oplus = 0$ ，因此，先手 (P) 可控場，先手 (P) 勝。

(三)、尼姆和 ($\oplus$)

尼姆和 ($\oplus$) 是一種以 XOR (二進位不進位加法) 為基礎的特殊加法運算。其運算方式為將兩數轉換為二進位後，逐位進行 XOR (相同為 0，不同為 1)。在尼姆遊戲中，尼姆和用來判斷局面的勝負性質，是組合博弈論的核心工具。

(四)、三角殺棋

三角殺棋（Triangular Nim）是尼姆（Nim）遊戲的變體，三角殺棋是由一個正三角形棋子堆組成，每個邊的棋子數等同於層數，如圖 3-1 所示，五層三角殺棋，每個邊的棋子數為五，往上遞減；玩家雙方互取棋子，一次可以拿一顆到一排直到場上棋子全數取完（另有變體規則規定取子不可超過 3 顆），取子時必須拿取一個方向的一顆以上，且**禁止越棋取子**和**重復取子**。遊戲規則分為：取最後子勝的「normal 版本」和取最後子為敗的「misère 版本」。

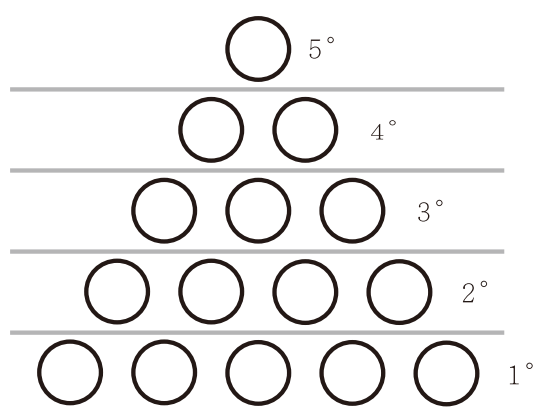


圖 3-1、5 層三角殺棋

四、資料分析

(一)、取子棋與尼姆遊戲獲勝策略分析

根據取子棋（單堆尼姆）獲勝策略分析，在「Normal 版本」規則下，先將原始棋子分堆，確保每堆取子時，先手（P）取子一定無法完全取完，而且留下的棋子數無論多少，後手（N）必定可以一次取完，也就是分堆後，確保每堆必定可以執行 2 個動作，不能有例外，此時每堆的棋子數為取子限制數+1 ($K+1$)。因此若原始棋子數 (N) 可被 ($K+1$) 整除，則後手（N）可控場，後手（N）勝；若原始棋子數 (N) 不可被 ($K+1$) 整除，有餘數 (n)，則先手（P）先取走 n 顆，先手（P）可控場，先手（P）勝。在 *misère* 規則下，必須將最後一顆棋子視為 1 動作，往回逆推，可以推出任意棋子數的獲勝策略。

尼姆（Nim）遊戲有若干堆棋子（ m 堆， $m \in N$ ，且 $m > 1$ ），每堆棋子的數量（ $N_1、N_2...、N_m$ ； $N_1 \sim N_m \in N$ ）都是有限的，兩名玩家輪流取棋子，合法的取棋子的規則是輪到的玩家必須選擇其中一堆石子，並拿走任意顆（不能不拿）。根據文獻，可利用尼姆和（ $\oplus$ ）計算勝負，所有石堆的尼姆和 $\oplus = 0$ ，則該局面是必敗局（先手勝，P-position）。若 $\oplus \neq 0$ ，則是必勝局（後手勝，N-position）。

換句話說，兩個個遊戲獲勝關鍵在於：取子棋在分堆後，剩下棋子確保取子動作為偶數動作；尼姆遊戲確認在取完棋子後為偶數堆、偶數動作（玩家造成 $\oplus=0$ ），則成為可控局面，可以計算勝負。

(二)、尼姆遊戲與三角殺棋規則差異

三角殺棋與尼姆遊戲規則上有所不同，因為三角殺棋的規則，會使取子過程中，會產生跨堆取子的現象，或讓原本同堆的棋子分割成不同堆，兩種情況分別說明如下：

1. 尼姆遊戲中同一堆棋子中，無法分割為兩堆棋子；但是在三角殺棋中，若在同一堆（層）棋子中間取子，使兩端各有餘子，則餘子分割兩堆，根據不可越棋取子的規則，至少需要兩個動作（2 動）才能取完。

如圖 4-1 所示，在此種取子情況下，雖然剩餘棋子數都是 2 子，但是在尼姆遊戲中視為同一堆棋子（最少 1 動），在三角殺棋中該層棋子被分割成兩堆，需要 2 動才能取完。

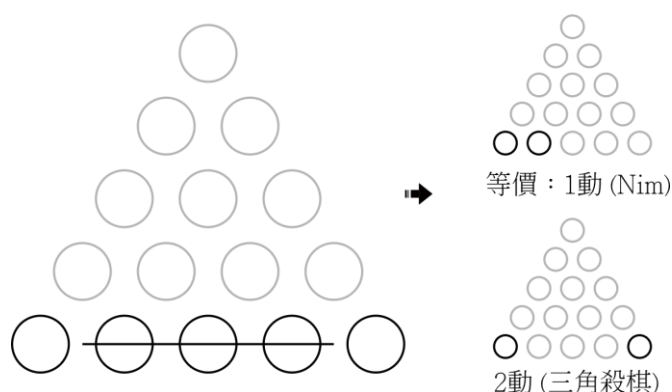


圖 4-1：最底層取中央 3 子，兩側各餘 1 子，在 Nim 遊戲中等價剩餘 2 子，在三角殺棋中則視為兩堆棋子

2. 在三角殺棋中可以跨層取子（視為不同方向的同層取子），但在尼姆遊戲中只能選擇同一堆棋子取子，因為尼姆遊戲裡只有一個方向的分層。（如圖 4-2 所示，在尼姆遊戲中為不合法的取子方式，但在三角殺棋中為合法取子方式）。

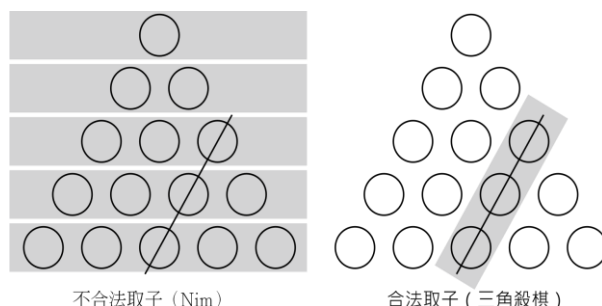


圖 4-2：Nim 遊戲中不允許跨堆取子，在三角殺棋中允許相連取子（不同方向的同層取子）

（三）、尼姆和 ($\oplus$) 在三角殺棋的適用性分析

三角殺棋與尼姆遊戲規則上的不同，所以會有一些殘局在尼姆遊戲的規則下，先手（**Previous**，棋譜中以 **P** 表示）會獲勝，但在三角殺棋規則中，則為後手（**Next**，棋譜中以 **N** 表示）獲勝。尼姆遊戲的必勝演算法（玩家造成 $\oplus=0$ ）不適用三角殺棋。

說明：

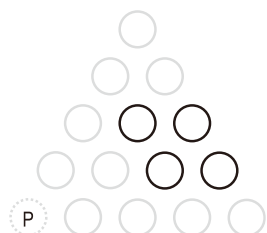


圖 4-3、三角殺棋，在 P 取子後剩下四顆棋子的殘局

圖 4-3 為五層三角殺棋，行棋至中途，先手（P）取子後的殘局。在尼姆遊戲的規則中，剩餘的四顆棋子分屬兩堆棋子（  方向），因此尼姆和 $\oplus=0$ （圖 4-4），因此無論後手（N）取任何一堆的任何數量棋子，先手（P）只要拿取另一堆棋子中相同數量的棋子，則先手（P）勝。

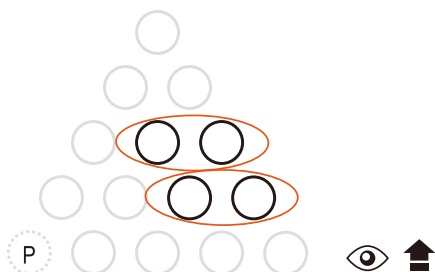


圖 4-4、尼姆遊戲規則下，視為兩堆棋子，且 $\oplus=0$

在三角殺棋的規則中，剩餘的四顆棋子可以視為兩堆棋子（  方向），尼姆和 $\oplus=0$ （圖 4-4）；也可以視為三堆棋子（  方向），這個方向尼姆和 $\oplus=1$ （圖 4-5），後手（N）取子完可使尼姆和 $\oplus=0$ ，後手（N）獲勝。

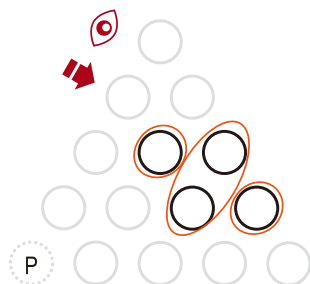


圖 4-5、三角殺棋遊戲規則下，可視為 2 或 3 堆棋子，則 $\oplus=0$ 或 1

（四）、待解決問題

對於複雜度高的三角殺棋，文獻中僅有以電腦程式語言，經由邏輯測試與倒推法，計算出先手（P）或是後手（N）可以獲勝（表 4-1），但實際對弈時，如何執行必勝步驟與應著策略缺乏相關研究，換言之，電腦僅算出先手 P 或是

後手 N 可以獲勝，但如何下才會贏，則缺乏棋譜及解法，主要是程式解法運算耗費電腦記憶體與資源，只能計算出勝出者，但無法給出棋譜。本研究希望能夠找出三角殺棋獲勝「應著」策略。

表 4-1、三角殺棋相關文獻

篇名	作者	出處
八層三角殺棋的勝負問題之研究	白聖群(2009)	台師大資工所碩士論文
八層及九層三角殺棋的勝負問題之改進與研究	陳俊佑(2010)	台師大資工所碩士論文
三角殺棋的電腦解法及其實現	許舜欽(1982)	電腦季刊 16：4
利用電腦探討七層三角殺棋的勝負問題	許舜欽(1985)	Proc. Of 1985 NCS.

(五)、研究設計

1. 名詞定義：「應著」是圍棋用語，指針對先手落子，後手做出對應。圍棋為落子於棋盤，三角殺棋則是從棋堆取子。「可控殘局」定義為三角殺棋中，當勝餘少數棋子時，無論對手如何取子，造成可控殘局的一方，保有必勝的應著。
2. 棋譜設定：因為三角殺棋具有可旋轉的可能，故本研究所產生的棋譜，將旋轉、鏡射視為同一種棋譜（圖 4-6），用來簡化紀錄與分析棋譜。

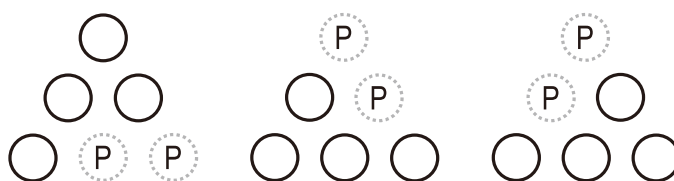


圖 4-6、旋轉、鏡射視為同一種棋譜

(六)、研究目的

1. 分析 1~3 層三角殺棋應著策略
2. 分析 4 層三角殺棋對局棋譜
3. 從棋譜推導「可控殘局」，找出「應著」策略

五、研究結果與討論

(一)、1~3 層三角殺棋勝負分析

依照三角殺棋的規則分析 1~3 層勝負（圖 5-1）：

1. 僅 1 層（1 子）無須判斷，規則即決定了勝負。
2. 2 層共 3 枚棋子採「normal 版本」規則，無論 P 先手如何取子，N 後手可控場，N 獲勝；採「misère 版本」規則，P 先手可控場，先取 2 子，則 N 敗。
3. 3 層共 9 枚棋子採「normal 版本」規則，P 先手可控場，先取 3 子，則盤面變成 2 層，先、後手易位，P 先手勝；若採「misère 版本」規則，無論 P 先手取 1 子、2 子或是 3 子，N 後手可應著造成可控殘局取勝。

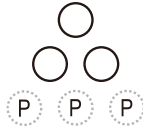
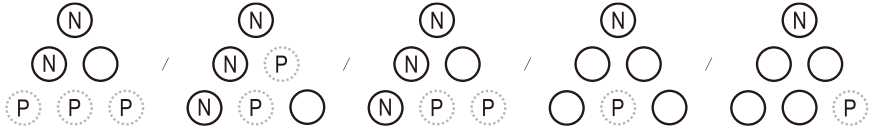
	normal 版本	misère 版本
1 層		
	P 勝	N 勝
2 層		
	N 勝	P 勝
3 層		
	P 勝	N 勝

圖 5-1、三角殺棋 1-3 層必勝方法（P 為先手，N 為後手）

(二)、4 層三角殺棋「normal 版本」勝負

分析 100 場 4 層三角殺棋對戰棋譜；若是採「normal 版本」規則時，先手 (P) 無論取多少子，後手 (N) 有應著策略 (圖 5-3)，可以造成可控殘局，後手 (N) 進而取勝。如圖 5-3(a)~(g) 所示，無論先手 (P) 如何取子，局勢將由後手 (N) 掌控：

1. 先手 (P) 取一子：有 3 種可能，後手 (N) 有 2 種應著方式 (圖 5-3(a)、(b))，再輪到先手 (P) 取子，則後手 (N) 一定可以將盤面分別導向可控殘局 (圖 5-3(i)~(k)) 其中之一。
2. 先手 (P) 取二子：有 3 種可能，後手 (N) 有 3 種應著方式 (圖 5-3(c)~(e))，再輪到先手 (P) 取子，則後手 (N) 一定可以將盤面分別導向可控殘局 (圖 5-3(h)~(l)) 之一。
3. 先手 (P) 取三子：有 2 種可能，後手 (N) 有 2 種應著方式 (圖 5-3(f)、(g))，再輪到先手 (P) 取子，則後手 (N) 一定可以將盤面分別導向可控殘局 (圖 5-3(k))。
4. 先手 (P) 取四子：有 1 種可能，後手 (N) 有 1 種應著方式，可將殘局導向 5-3-(f)。

(三)、4 層三角殺棋「misère 版本」勝負

若是無限取子數目，採「misère 版本」規則，先手 (P) 只要先取完最底層 4 子，盤面即回到 3 層三角殺棋，則造成 3 層三角殺棋，先、後手易位，勝負立判，先手 (P) 勝。

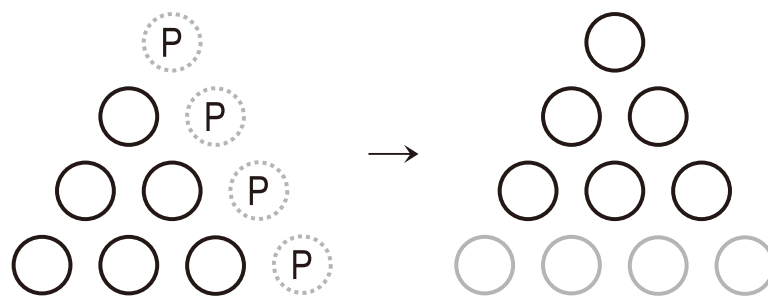


圖 5-2、「misère 版本」規則，先手 (P) 取 4 子，形成 3 層三角殺棋

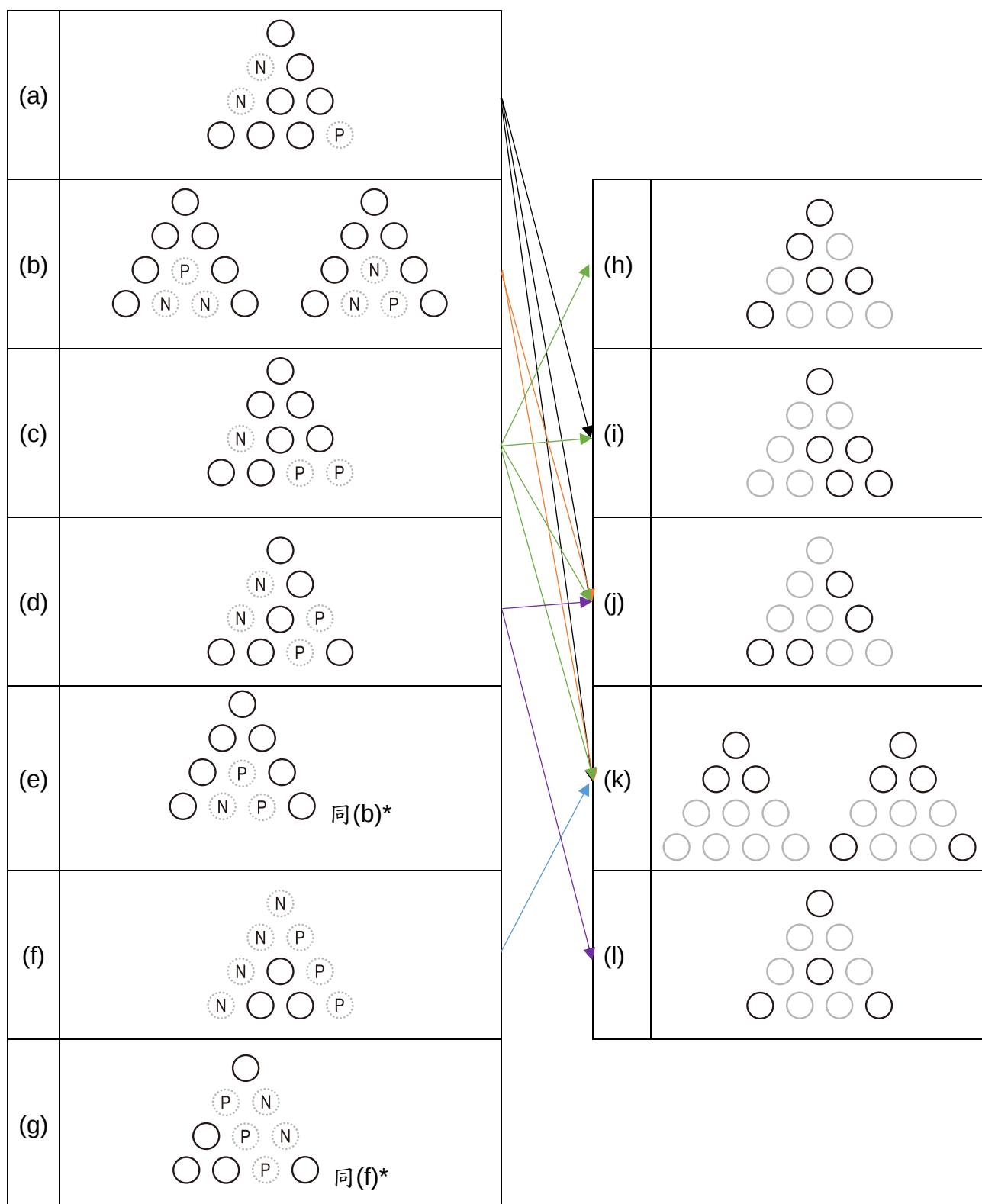


圖 5-3、不限制取子數下，採 normal 版本規則，先手 (P) 取任意位置、任意子數，後手 (N) 應著後，將導致可控殘局之棋譜：(a)~(b) 先手取 1 子，後手應著，(c)~(e) 先手取 2 子，後手應著，(f)~(g) 先手取 3 子，後手應著；(h)~(i) 1,4 型可控殘局，(j) 2,2 型可控殘局，(k) 3/3,1,1 型可控殘局，(l) 1,1,1,1 型可控殘局

*：可控殘局形式與其他形式相同

(四)、可控殘局分析

從 1~4 層三角殺棋**可控殘局**中尋找規則，若可將殘局棋子導向不相鄰偶數堆，偶數棋子（圖 5-3-(j) 2,2 型、(l) 1,1,1,1 型），則成為可控殘局；若將殘局棋子導向相鄰 3 顆棋子形成三角形排列一堆或連帶 2 顆單獨不相鄰的棋子（圖 5-3-(k) 3/3,1,1 型），無論如何取子，因為相鄰 3 顆棋子形成三角形排列，必定可成為 2 個動作，因此最終形成偶數動作，成為可控殘局；若將殘局棋子導向相鄰 4 顆棋子不成一直行，連帶 1 顆單獨不相鄰的棋子（圖 5-3-(h) 1,4 型、(i) 1,4 型），必定可成為偶數動作，成為可控殘局。

1. 無論採取「normal 版本」規則**剩餘動作為偶數時，成為可控殘局**。若是採取「misère 版本」規則，則**餘動作為奇數時，成為可控殘局**。
2. 在「normal 版本」規則下，剩餘棋子必須可以劃分為偶數堆，合計為**偶數動作**。可控殘局的型式為：(1,1,1,1) 型、(2,2) 型、(3/3,1,1) 型、(1,4) 型，四大類（圖 5-3）。

根據「normal 版本」下的可控殘局推衍，在原本偶數堆偶數動作外增加獨立 1 子，則「misère 版本」的可控殘局型式應該為：(1,1,1) 型、(2,2) 型、(3,1) 型、(4) 型，四大類。若對局過程中，輪到的玩家取子後可創造出這四類可控殘局，則次一手玩家無論如何取子，皆無法取勝。

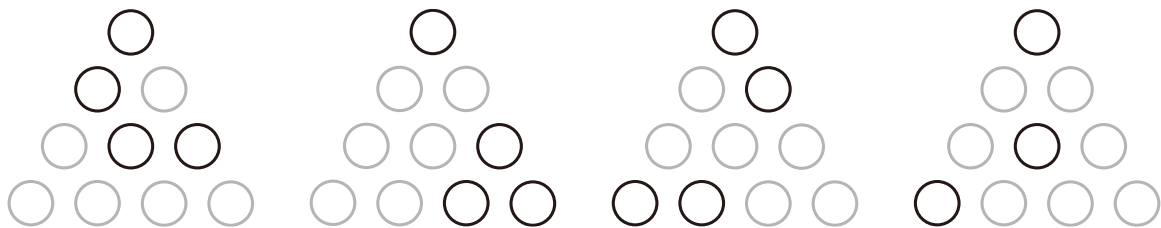


圖 5-4、「misère 版本」的可控殘局型式

(五)、變體規則

鑒於「misère 版本」規則下，不限取子數目，先手（P）只要先取完最底層 4 子，盤面即回到 3 層三角殺棋，勝負立判，先手（P）勝，棋局沒有變化性，且因為剩餘棋子少，無法套用「misère 版本」的可控殘局型式。

將既有的規則衍伸形成變體規則：「4 層三角殺棋 misère 版本規則，取子數限定為最多 3 顆」，則可以增加 4 層三角殺棋「misère 版本」的可玩性。

採 misère 版本規則，限制取子數（1~3 顆），先手（P）取任意位置、任意子數，後手（N）應著後（圖 5-5），，無論先手（P）再如何取子，後手（N）可將局面導致可控殘局，將導致四種類型的可控殘局（圖 5-4），因此後手（N）勝。

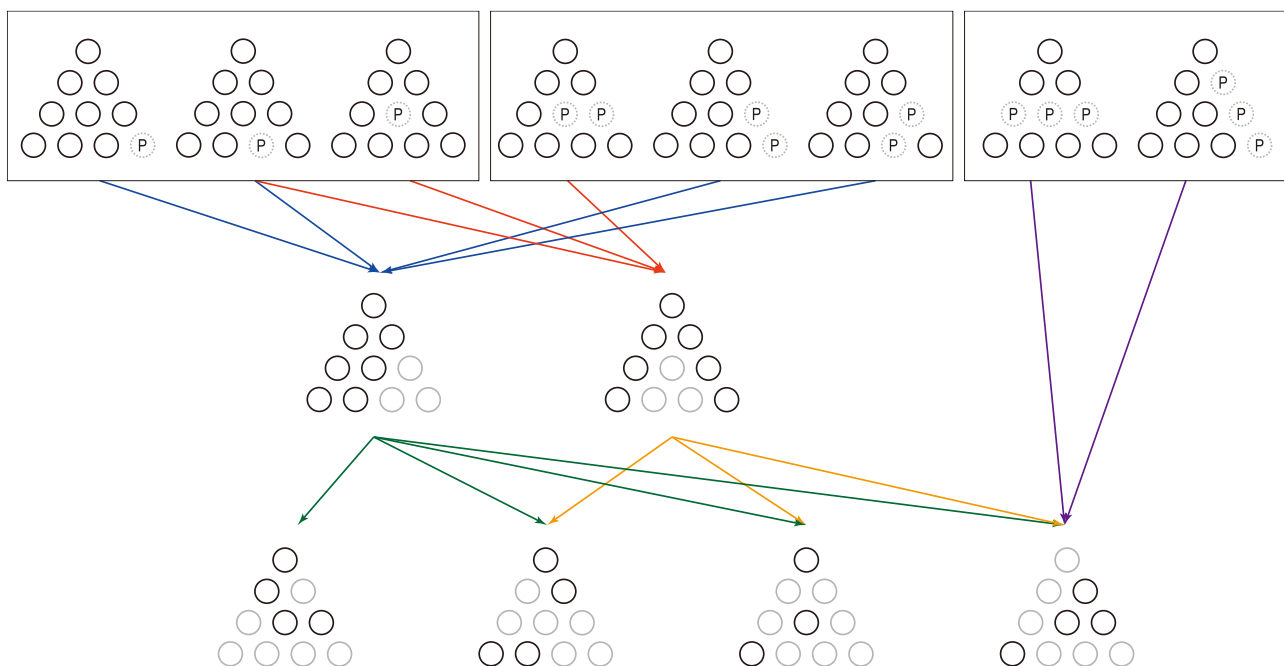


圖 5-5、限制取子數（1~3 顆），採「misère 版本」規則，先手（P）取任意位置、任意子數，後手（N）應著後，將導致可控殘局之棋譜。

若將套用變體規則於「Normal 版本」的 4 層三角殺棋，則不可能出現圖 5-3-(f)的「應著」，因為後手（N）被限制取子數為 1-3 顆，因此先手（P）取完最底層相連 3 子後，後手（N）無論如何「應著」，局勢將轉為先手（P）控場，先手（P）可以造成「可控殘局」。

因此先手（P）取完最底層相連 3 子，成為唯一由先手（P）獲勝的棋局，先手（P）獲勝（圖 5-6）。

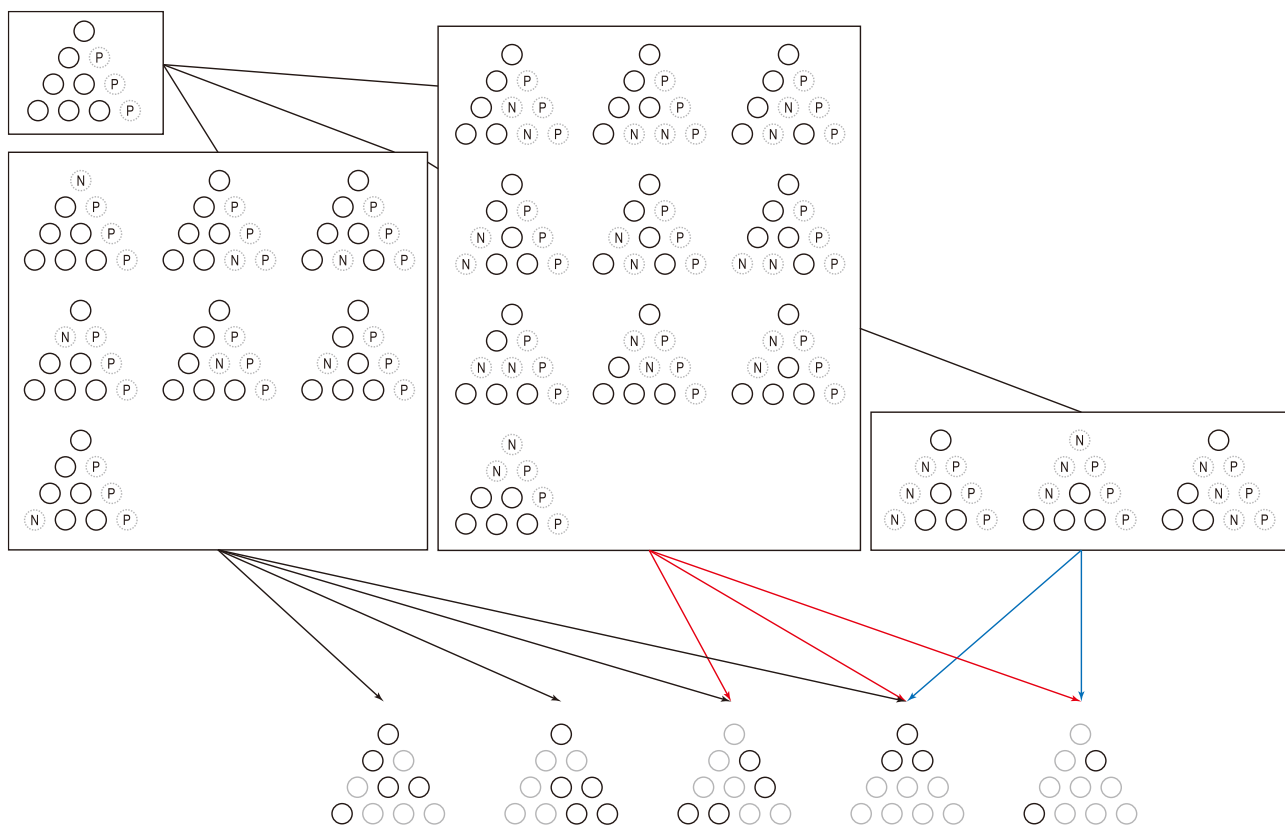


圖 5-6、限制取子數（1~3 顆），採「Normal 版本」規則，先手（P）取完最底層相連 3 子後，後手（N）無論如何「應著」，先手（P）將導致可控殘局。

(六)、4 層三角殺棋的勝負

4 層三角殺棋，不限制取子數，「Normal 版本」中無論先手（P）如何取子，後手（N）有對應「應著」可以控制棋局，後手（N）必勝。先手（P）先取走最底層相連 4 子，盤面即回到 3 層三角殺棋，先手（P）可以控制棋局，先手（P）必勝（表 5-1）。

4 層三角殺棋，限制取子數（最多取 3 顆），「Normal 版本」中，先手（P）先取走最底層相連 3 子，則無論後手（N）如何「應著」，先手（P）可以控制棋局，先手（P）必勝。「misère 版本」中，無論先手（P）再如何取子，後手（N）可將局面導致可控殘局，後手（N）必勝（表 5-1）。

表 5-1、4 層三角殺棋不同版本規則與變體規則勝負表

	「Normal 版本」	「misère 版本」
不限制取子數	後手 (N) 勝	先手 (P) 勝*
限制取子數 (1~3 顆)	先手 (P) 勝**	後手 (N) 勝

*：唯一獲勝法：先手 (P) 先取走最底層相連 4 子

**：唯一獲勝法：先手 (P) 先取走最底層相連 3 子

六、評鑑與檢討

本研究透過系統化的棋譜蒐集與殘局分類，建構出 4 層「三角殺棋」的「可控殘局」，並成功推導其「應著」策略。本研究補足過去文獻僅有電腦勝負判定、缺乏完整棋譜與策略說明的不足，使三角殺棋的策略分析更接近真實人類對局的思維。

然而，本研究仍存在若干限制。首先，棋譜分析以人工分類與手動推論為主，雖能完整掌握取子過程，但在棋譜數量更龐大、層數更高時，人工分析的效率與準確度將受侷限。未來可結合程式輔助工具，在保留人類策略解釋性的前提下提升分析速度。其次，本研究僅分析 1~4 層三角殺棋，高層數棋局的複雜度呈指數成長，其可控殘局類型是否具一致性、是否可歸納出一般化公式，仍需進一步驗證。

整體而言，本研究成功建立可控殘局理論架構，並以實際棋譜驗證，為三角殺棋策略提供重要參考，也為後續更高層次的組合博弈研究奠定扎實基礎。

七、參考資料

1. 張鎮華 (1978)。拈及其各種變型遊戲。數學傳播，第 3 卷第 2 期 (10)，6-15
2. Bouton, C. L.(1901)。Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics*, 1901–1902, **3** (14): 35–39
3. 許舜欽(1982)。三角殺棋的電腦解法及其實現。電腦季刊。第 16 卷,第 4 期
4. 許舜欽。利用電腦探討七層三角殺棋的勝負問題。Proc. of 1985 NCS,pp. 798-802, Dec. 1985.
5. 陳彥齊、李政緯、莊皓翔 (2007)。致勝密碼。第 47 屆全國中小學科學展覽
6. 白聖群 (2009)。八層三角殺棋的勝負問題之研究。國立臺灣師範大學資訊工程研究所碩士論文
7. 陳俊佑 (2010)。八層及九層三角殺棋的勝負問題之改進與研究。國立臺灣師範大學資訊工程研究所碩士論文