

附件五之一

## 彰化縣 113 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

### 作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

組別： ☒ 國小組      ☒ 數學類

☐ 自然、科技類

☐ 國中組

☐ 人文社會類

作品名稱：數學遊戲-牽連

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

# 彰化縣 113 學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選

## 作品說明書

### 第一階段 研究訓練階段（教師撰寫）

#### 一、近二年學校獨立研究課程之規劃

本校自三年級起提供資優學生相關課程服務，主要切分為兩大部分：研究技能訓練與獨立研究實踐。

課程目標：（一）能體驗發現及解決問題的過程。

（二）能熟練某領域的知識。

（三）能學會研究所需技能。

（四）能依個人興趣拓展相關知識。

（五）能培養正確與積極的研究態度。

（六）能學會與人分工合作的正確態度。

課程大綱如下圖：



## 二、學校如何提供該生獨立研究訓練

學校在安排獨立研究課程時，按照學生年級切分為三年級、四年級，以及高年級三層次，說明如下：

（一） 三年級：針對三年級的資優生，會設計與學科相關的課程以拓展其知識基礎，每週安排兩節主題探索課程，主要在研究技巧的訓練方面，讓學生學習文書處理、資料蒐集與整理方法、圖書館運用、觀察與做筆記的能力、晤談方法。在資源教室的充實活動中，提供一般探索機會，搭配如數位相機、顯微鏡、簡單科學實驗技術等的操作練習。每年安排參訪多場展覽，讓學生能找出研究興趣與觀摩優秀作品，並隨時記錄有興趣的主題。

（二） 四年級：在學科加深加廣方面與三年級相同，但進入此階段，學生已開始針對有興趣的主題進行研究，而非單純只蒐集資料。每週兩節課的獨立研究課程，四年級資優生主要擔任研究協助者，配合學長姐的引導，協助研究觀察與記錄工作，對於了解實際研究歷程與重點事項，是很重要的訓練。

（三） 高年級：每週進行兩節課的獨立研究課程，實際進行研究，在教師協助下，完成「訂定主題」、「擬定工作進度與分配」、「擬定研究問題」、「蒐集資料與整理」、「尋求資源」、「實際研究與記錄」、「研究討論與發現」、「撰寫書面報告與分享」之流程。在此階段，教師的角色會依據學生能力，慢慢減少干預，擔任引導討論與技術指導工作，掌握學生計畫安排與實際進度是否得宜，並在學生完成報告時協助修改。

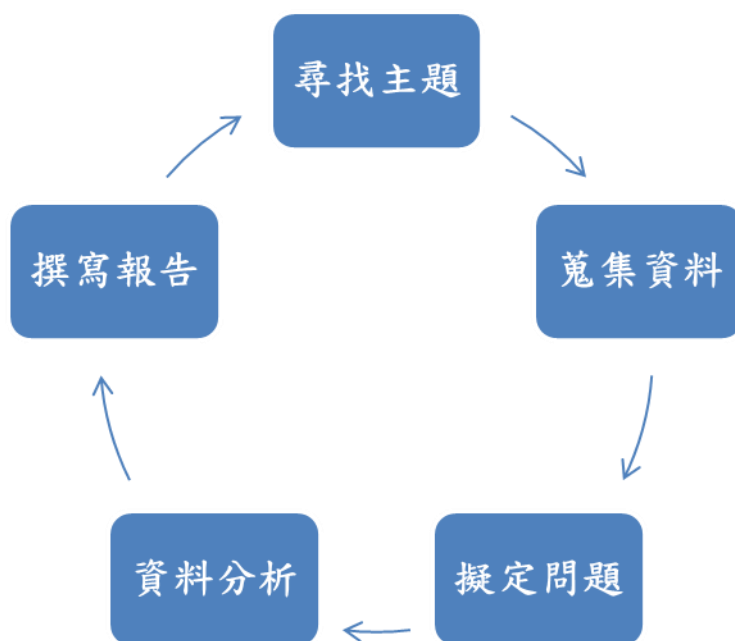
## 第二階段 獨立研究階段(由學生撰寫)

### 一、研究動機

我們了解到獨立研究分成三大類，因為已經做過人文社會類的研究，剩下數學類和自然類的研究，因為不想進行科學實驗，選擇探討數學。老師要我們上網搜尋數學遊戲，我們各找了一兩個遊戲，例如：跳蛙、火柴移動等，反覆討論後，覺得「牽連」(Entanglement)這個遊戲比較好玩，我們想要知道如何獲得最高分，開始分析討論。

### 二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

#### (一)擬定研究計畫



#### (二)研究問題

1. 分析棋盤。
2. 研究遊戲卡牌。
3. 探討第一層棋盤玩法。

4. 探討第二層棋盤玩法。

5. 探討第三層棋盤玩法。

### (三)工作進度表

| 日期<br>工作項目 | 9 月 | 10 月 | 11 月 | 12 月 | 1、2 月 | 3 月 | 4 月 | 5 月 |
|------------|-----|------|------|------|-------|-----|-----|-----|
| 確定研究主題     | ✓   |      |      |      |       |     |     |     |
| 蒐集資料       | ✓   | ✓    |      |      |       |     |     |     |
| 彙整相關文獻     |     | ✓    | ✓    |      |       |     |     |     |
| 進行初步討論     |     |      | ✓    | ✓    | ✓     |     |     |     |
| 進行資料分析     |     |      |      | ✓    | ✓     | ✓   |     |     |
| 撰寫報告       |     |      |      |      |       |     | ✓   | ✓   |

### 三、彙整相關文獻

#### (一)遊戲介紹(遊戲名稱中英文、出處、玩法)

1. 名稱：牽連(entanglement)

2. 出處：在昌爸工作坊的網頁中，發現的一款以 Html5 程式語言編寫出的遊戲。

3. 遊戲規則：這款遊戲剛開始在中間會出現一張卡牌，上面會有從中間延伸出來的一條線，接下來會出現一張卡牌，卡牌上共有六條線，卡牌可以旋轉六個方向，目的是為了連接出最長的線條。

4. 計分方式：只要前進一格，就會加一分，如果你所放的卡牌可以延伸很長的路線，碰到很多格，就是第一個格子加一分，第二格就加兩分...以此類推。



## (二)正六邊形：

在幾何圖形中，六邊形是指有六條邊和六個頂點的多邊形，其內角和是 720 度。六邊形有很多種，最對稱的為正六邊形。它是一種可以使用尺規作圖，也可以拼滿平面的結構，這種圖形每個頂點都是三個六邊形的公共頂點，形成一個很緊密的二維空間。

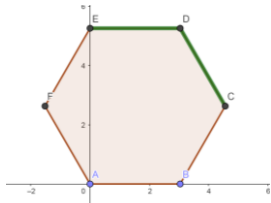
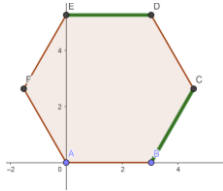
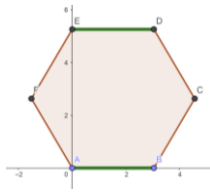
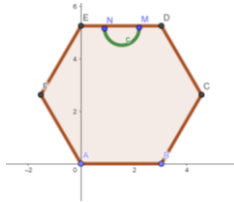
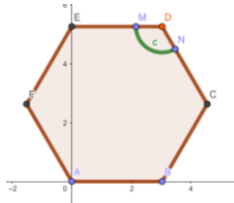
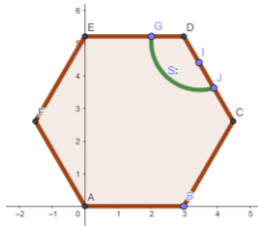
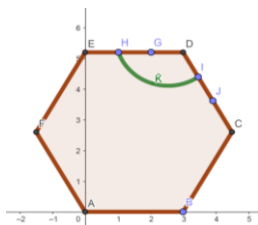
正六邊形是一種雙心多邊形，這表示它同時具有內切圓和外接圓，邊長與其外接圓半徑相等，邊心距與內切圓半徑相等。正六邊形的每個內角都是 120 度，且具有 6 次的旋轉對稱性（階數為 6 的旋轉對稱性）和 6 軸對稱性（有 6 個對稱軸的軸對稱性）。

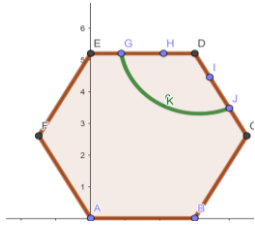
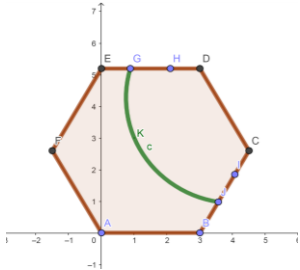
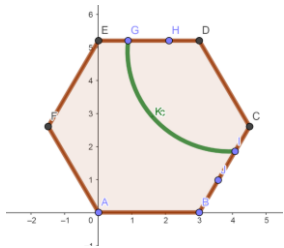
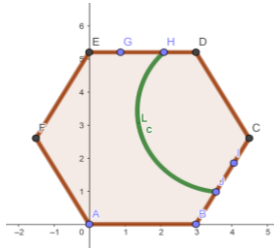
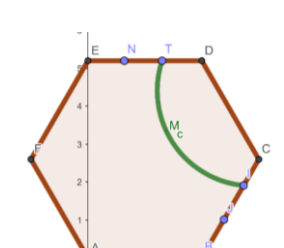
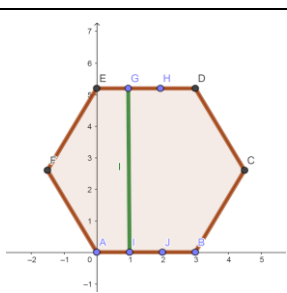
正六邊形最長的對角線是兩側頂點的對角線，其長度恰好為邊長的兩倍，因此若有一個三角形其中一個頂點位於六邊形幾何中心、其中一條邊與六邊形共用，則這個三角形是正三角形，且正六邊形可以分割成 6 個此三角形。

## 四、資料分析

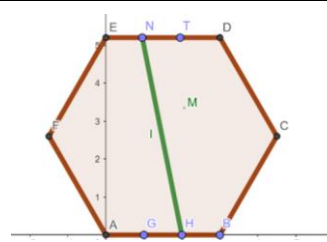
### (一)名詞定義

| 類型       | 名稱 | 定義                                   | 圖示                                                                                    |
|----------|----|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 遊戲<br>配件 | 棋盤 | 這是一個以正六邊形密鋪聯結成三層的同心圓形成的平面。           |  |
| 遊戲<br>配件 | 卡牌 | 這是一個正六邊形，每一邊上有兩點，任意連結兩點形成一線，所以共有六條線。 |  |

|    |         |                               |                                                                                       |
|----|---------|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 邊  | 旁邊      | 在正六邊形上，任意相鄰的兩條邊，我們稱為旁邊。       |    |
| 邊  | 斜邊      | 在正六邊形上，跨過一邊的兩條邊，我們稱為斜邊。       |    |
| 邊  | 對邊      | 在正六邊形上，跨過兩邊的兩條邊，我們稱為對邊。       |    |
| 線條 | 肉包      | 在同一邊上的兩點相連成的弧線，我們稱為肉包。        |   |
| 線條 | 尖角<br>1 | 在旁邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為尖角，共有四種類型。 |  |
| 線條 | 尖角<br>2 | 在旁邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為尖角，共有四種類型。 |  |
| 線條 | 尖角<br>3 | 在旁邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為尖角，共有四種類型。 |  |

|    |         |                               |                                                                                       |
|----|---------|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 線條 | 尖角<br>4 | 在旁邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為尖角，共有四種類型。 |    |
| 線條 | 彎橋<br>1 | 在斜邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為彎橋，共有四種類型。 |    |
| 線條 | 彎橋<br>2 | 在斜邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為彎橋，共有四種類型。 |    |
| 線條 | 彎橋<br>3 | 在斜邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為彎橋，共有四種類型。 |  |
| 線條 | 彎橋<br>4 | 在斜邊任意兩點相連形成的弧線，我們稱為彎橋，共有四種類型。 |  |
| 線條 | 直橋<br>1 | 在對邊任意兩點相連形成的線段，我們稱為直橋，共有兩種類型。 |  |

|    |    |                               |
|----|----|-------------------------------|
| 線條 | 直橋 | 在對邊任意兩點相連形成的線段，我們稱為直橋，共有兩種類型。 |
|    | 2  |                               |

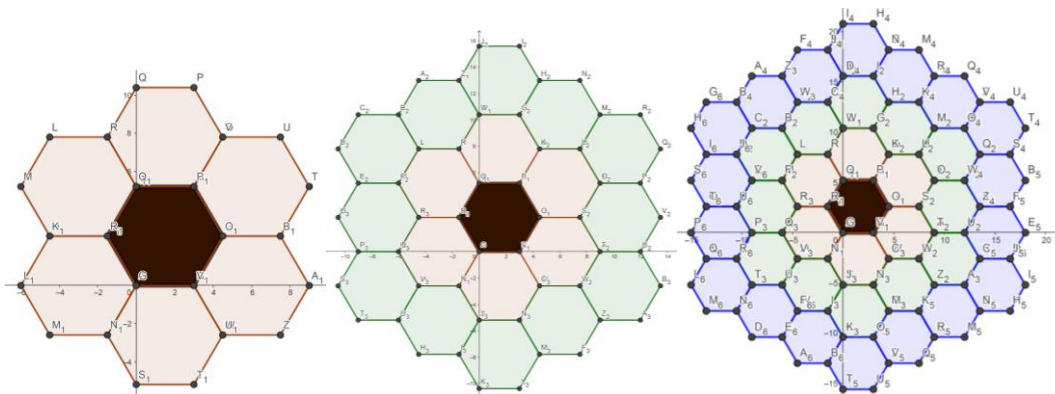


(二)棋盤分析：它是一個以同心圓方式組合成的正六邊形棋盤，正式遊戲中共有三層。

第一層：6 個正六邊形圍成一圈。

第二層：12(3\*6-6)個正六邊形圍成一圈。

第三層：18(4\*6-6)個正六邊形圍成一圈。



觀察與發現：

1. 標示出每一層的格子數：6，12，18……，形成等差數列，且其公差為 6。
2. 三層棋盤共有  $6+12+18=36$  格。

(三)卡牌線條分析

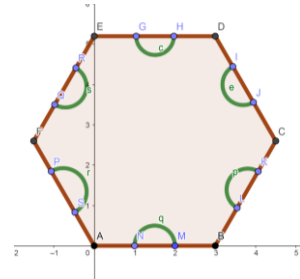
1. 一張卡牌是一個正六邊形，每一邊上有兩個點，故  $6*2=12$ ，共有十二個點；每兩點連成一線， $12\div 2=6$ ，所以每張卡牌有六條線。
2. 共有幾種卡牌？

(1)因為卡牌可以旋轉，計算時，必須扣除旋轉後線條重疊的卡牌。

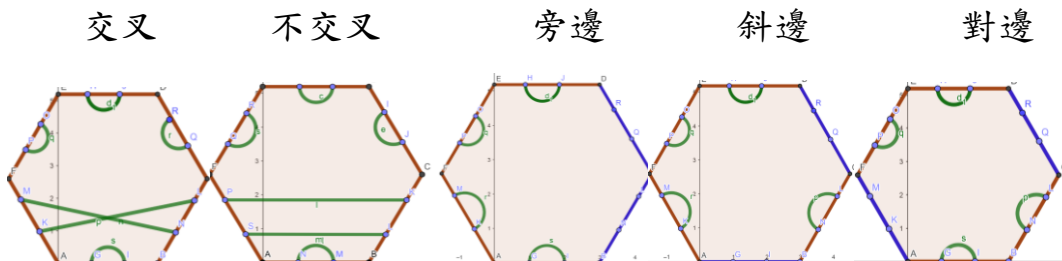
(2)分類

I. 一條邊(肉包)

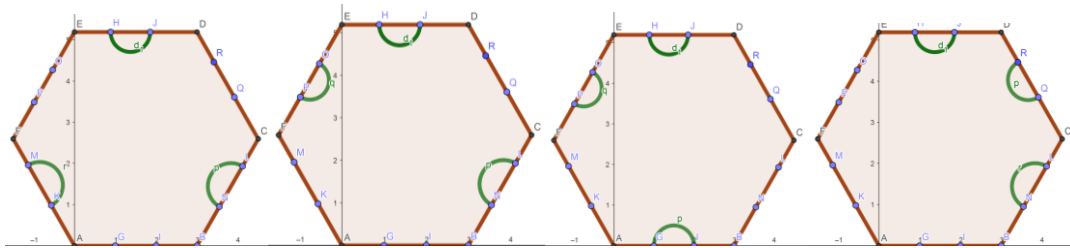
(I)六個肉包：1種。補充說明：沒有五個肉包的圖形，因為剩下一邊上的兩點，必然成為第六個肉包。



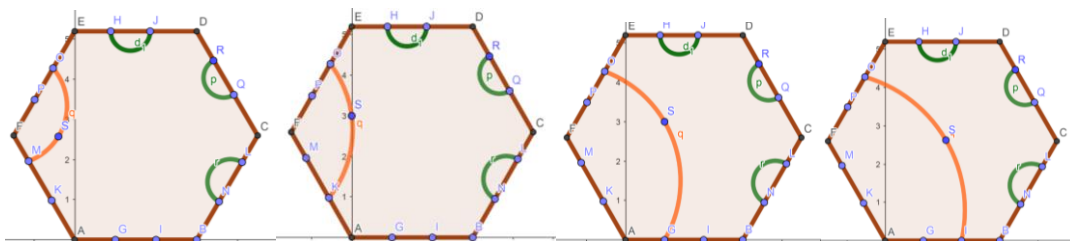
(II)四個肉包：2(交叉、不交叉)\*3(旁邊、斜邊、對邊)=6



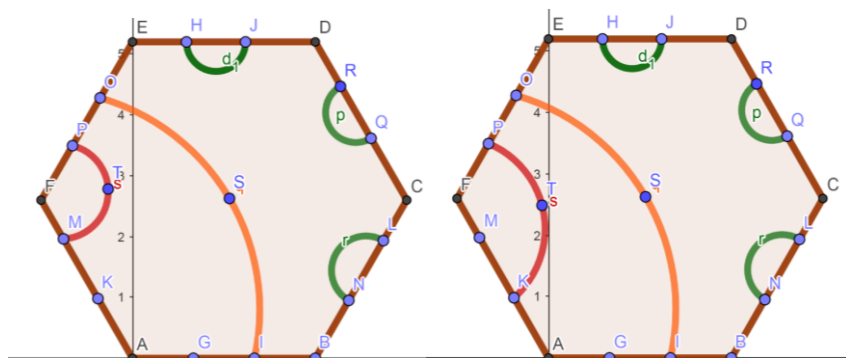
(III)三個肉包：4(邊的可能)\*8(=4\*2\*1，三邊大亂鬥線條類型)=32



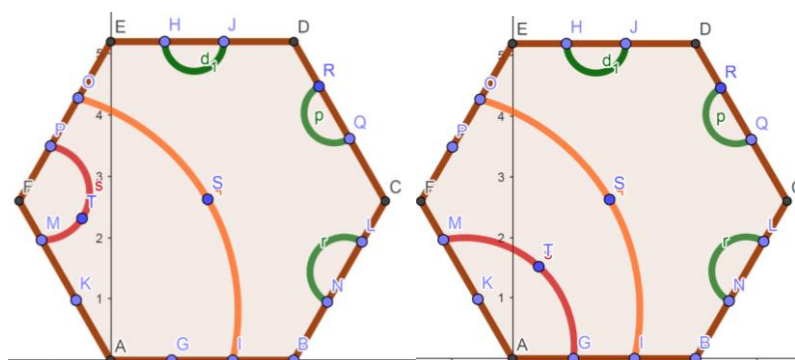
扣除三個肉包的三邊，剩下三邊六個點，任選其中一點開始連接，不能選擇同邊上的點，因為會形成肉包，必定只剩下四種可能。



接下來的第二點有兩種可能，第一種是選擇邊上有線的点出發，不能連到同樣邊上有線的隔壁點，這樣會讓剩下的邊上兩點形成第四個肉包，所以只剩兩點可選擇。



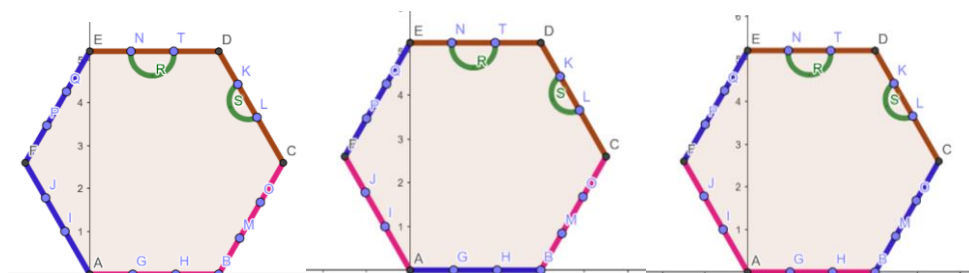
第二種狀況是選擇邊上沒有線條的任一點出發，不能連接自己的隔壁點，只剩第一條線上起始點(或結束點)旁邊的兩點可以選擇。

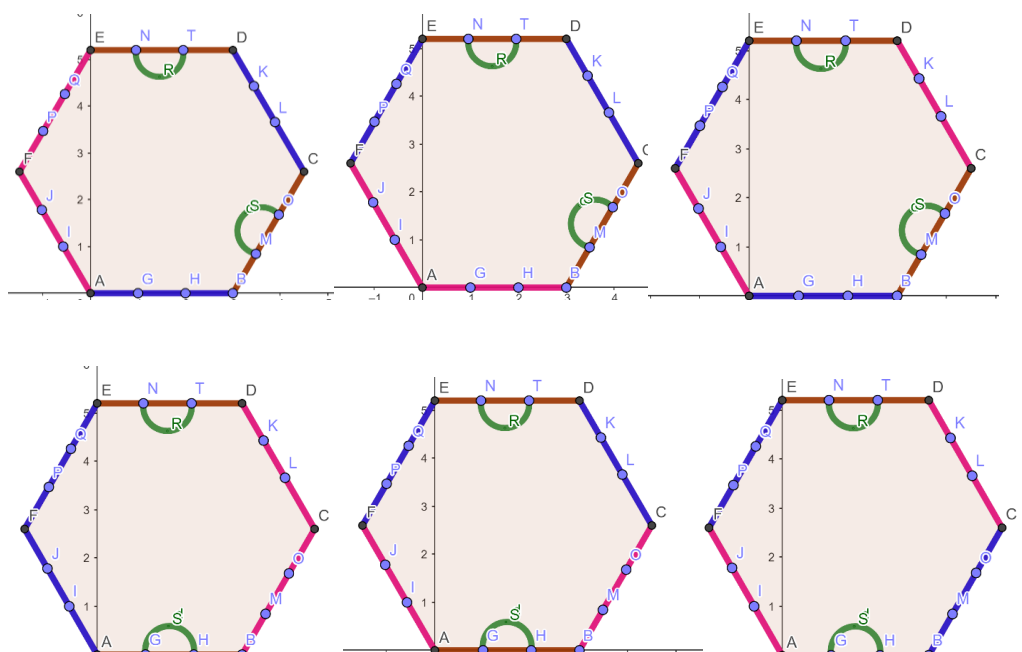


最後剩下的兩點必成一線，沒得選擇。

(IV)二個肉包：

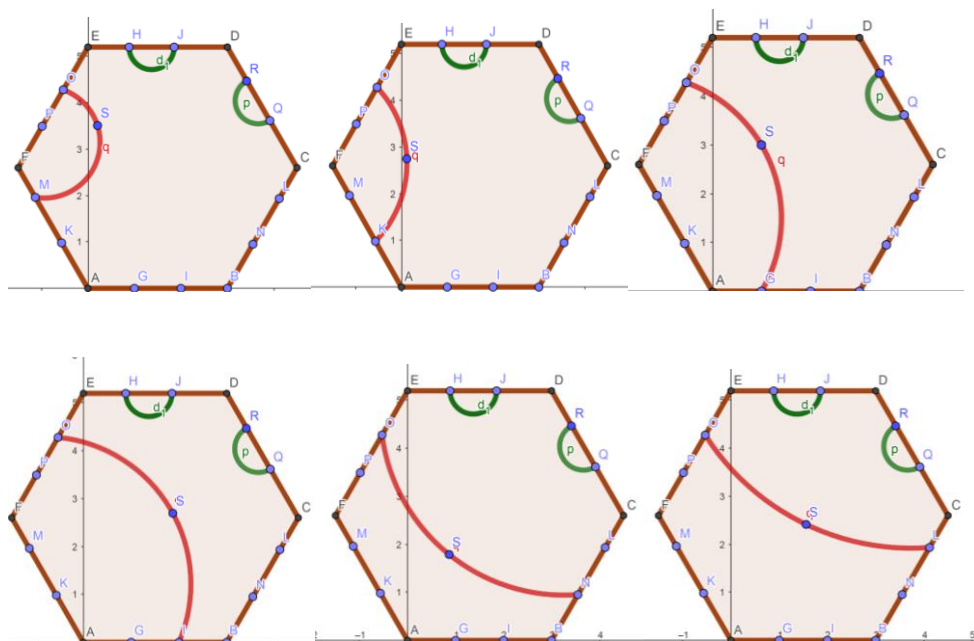
A. 兩邊混類型  $9(\text{邊的可能}) \times 2(\text{交叉、不交叉}) \times 2(\text{交叉、不交叉}) = 36$





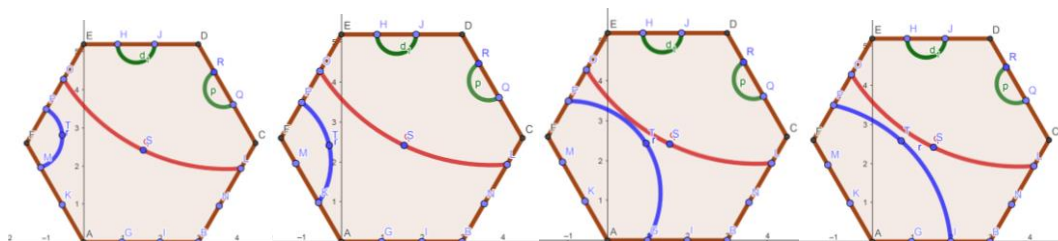
## B. 四邊大亂鬥線條類型 $6*4*2*1=48$

扣除兩個肉包的兩邊，剩下四邊八個點，任選其中一點開始連接，不能選擇同邊上的點，因為會形成肉包，所以只剩六種可能。

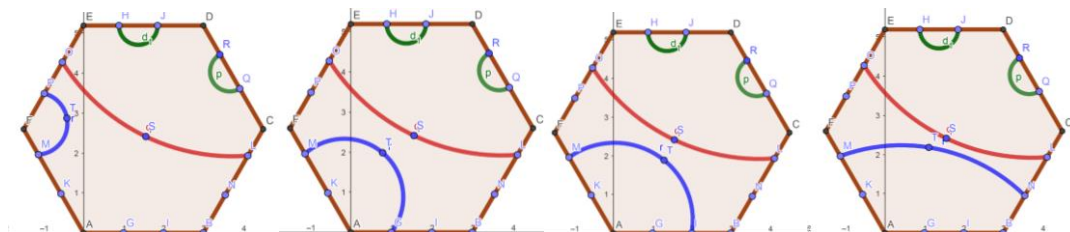


接下來的第二點有兩種可能，第一種是選擇第一點同邊上的點作為第二條線的起始點，原本有五種可能性，但因為不能同時連到第一

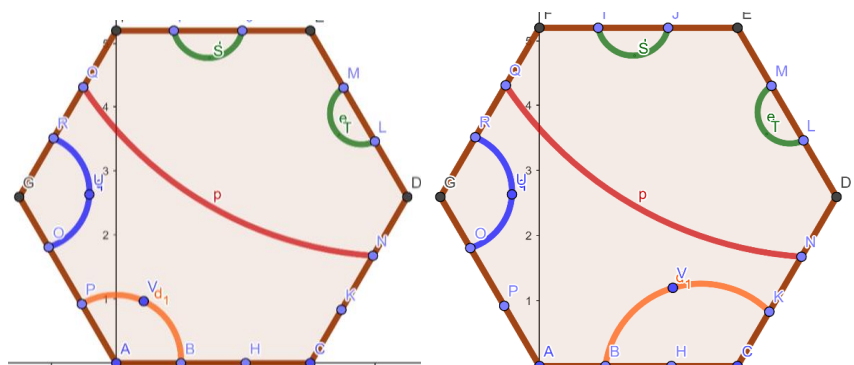
條線結束點旁邊的點，這樣就會成為兩邊混類型，重複計算，所以第二條線起始點只能連接剩下的四點。



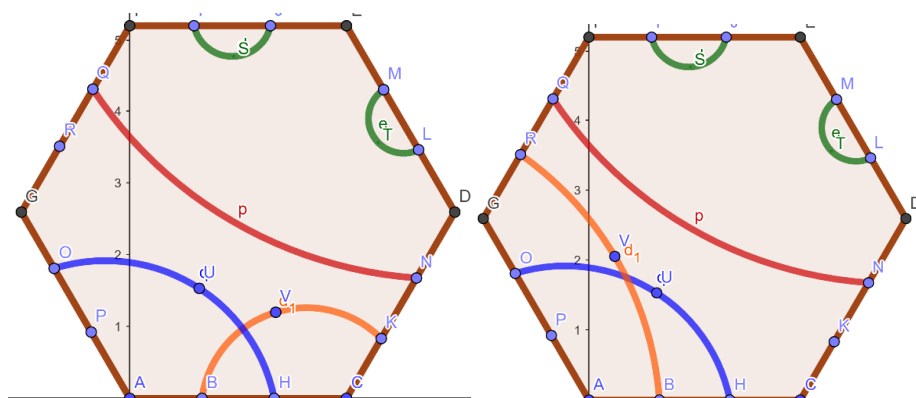
第二種狀況是沒有線條的邊上任意一點，也是只能夠連接四點，因為不能夠連接自己同邊上的隔壁點，只剩四點可以選擇。



第三條線的起始點只能連接兩個點，同樣兩種狀況，第一種狀況是第三條線的起始點為沒有線條的邊上任意一點，不能夠連接自己同邊上的隔壁點，只剩第一、二條線上結束點旁邊的兩點可以選擇；



第二種狀況第三條線起始點位於第一、二條線結束點(或起始點)旁邊的點，扣除會形成兩兩相混的那一點，所以只剩下兩點可選擇。

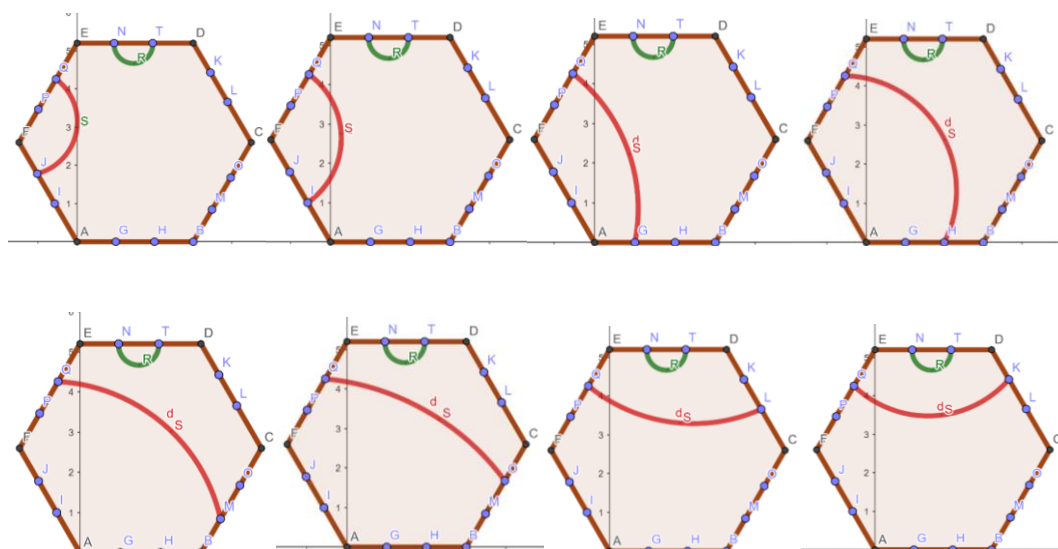


最後剩下的兩點必成一線，沒得選擇。

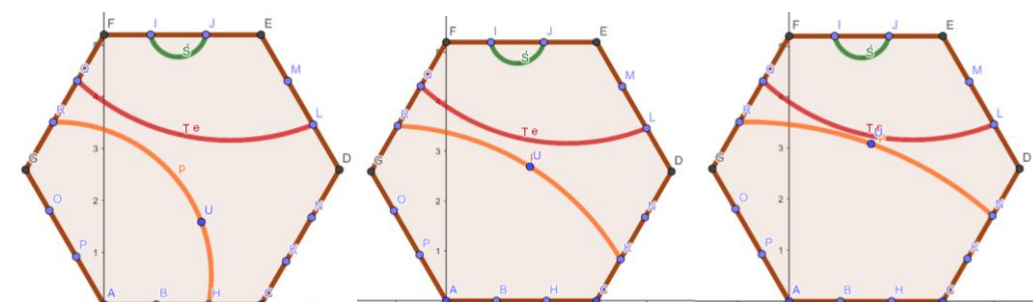
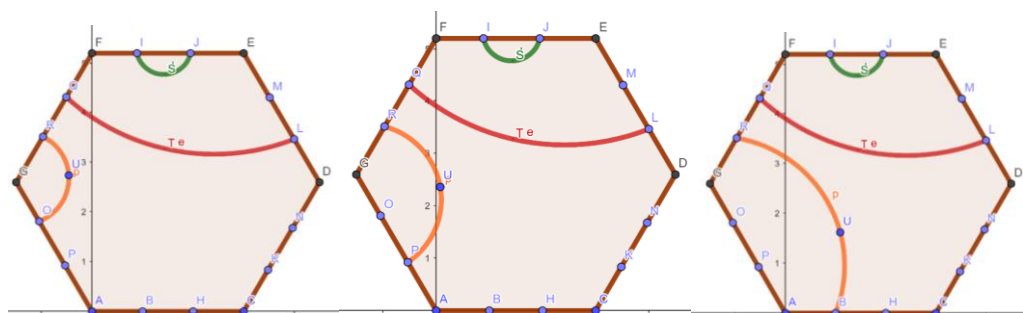
(V)一個肉包：

A. 五邊大亂鬥線條混類型(1, 5)  $8*6*4*2*1=384$

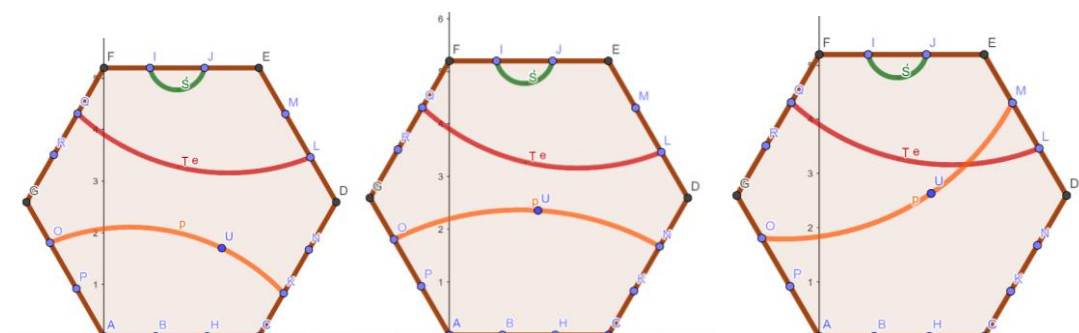
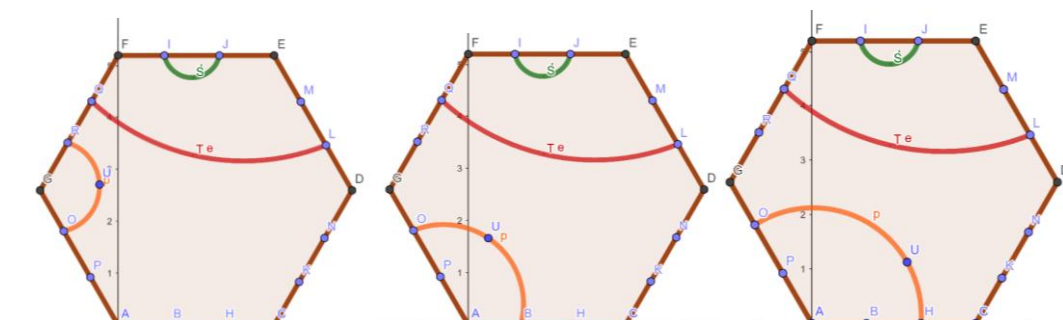
扣除肉包的邊，剩下五邊十個點，任選其中一點開始連接，不能選擇同邊上的點，因為會形成肉包，所以必定只剩下八種可能。



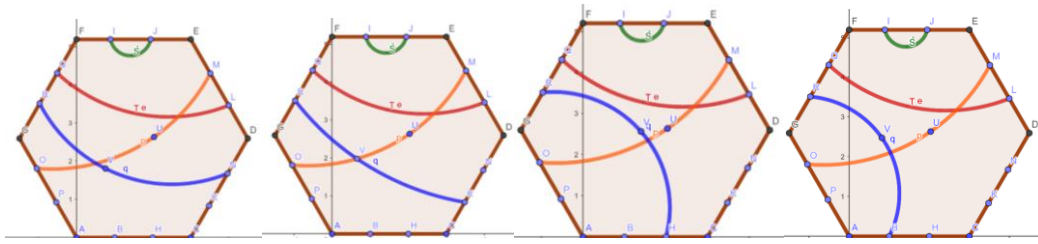
接下來的第二條線有兩種可能，第一種是選擇邊上有線的點出發，因為不能同時連到邊上有線的隔壁點，這樣會成為兩邊混類型，重複計算，所以只能連接剩下的六點。



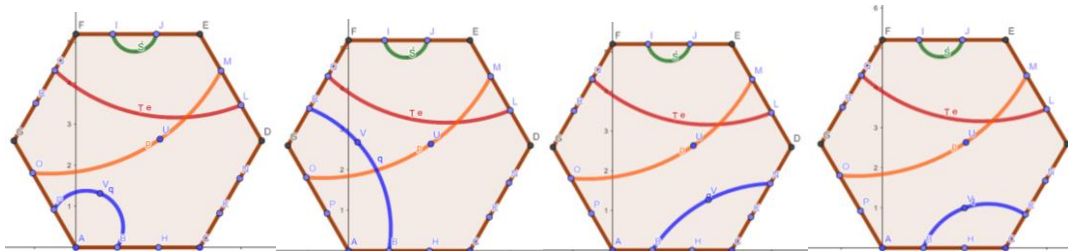
第二種是邊上沒有線條的任意一點出發，因為不能夠連接自己同邊上的隔壁點，只剩六點可以選擇。



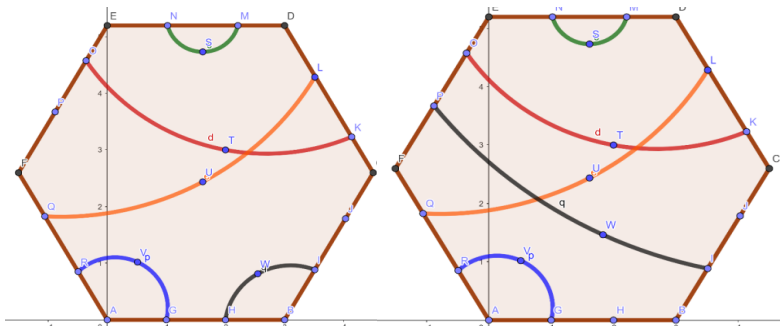
第三條線同樣兩種狀況，第一種狀況選擇邊上有線的隔壁點出發，只可連接完全沒有線的邊上點，不可連接已有線的邊上點，這樣會成為兩邊混(或三邊混)類型，重複計算，所以只有四種選擇；



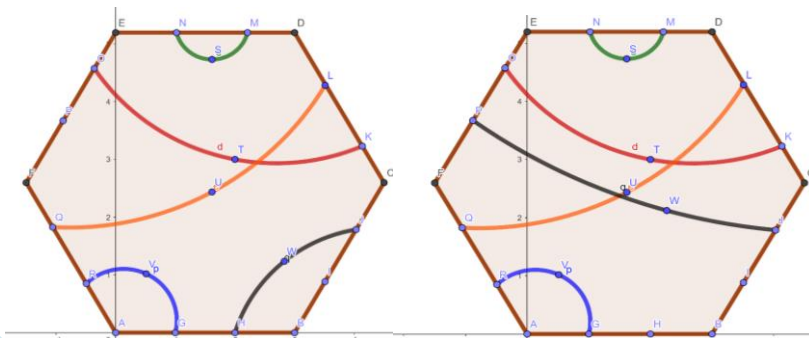
第二種狀況是邊上沒有線的任一點出發，不能連接同邊上的隔壁點，會形成肉包，同樣只剩四點可選擇。



第四條線的起始點只能連接兩個點，兩種狀況，第一種狀況是還有一邊上完全沒有線，以此邊上點出發，不能選擇同邊上的隔壁點，因為會形成肉包，所以只剩兩點可選擇。



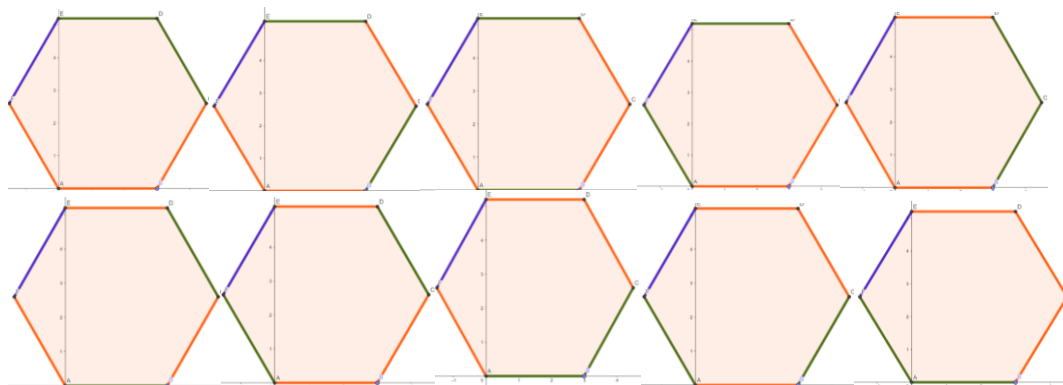
第二種狀況已經沒有完全沒有線的邊，任選一點出發，必須扣除會形成兩邊混的點，所以同樣只剩兩點可選。



最後剩下的兩點必成一線，沒得選擇。

B. 兩邊混三邊混 (1, 2, 3)

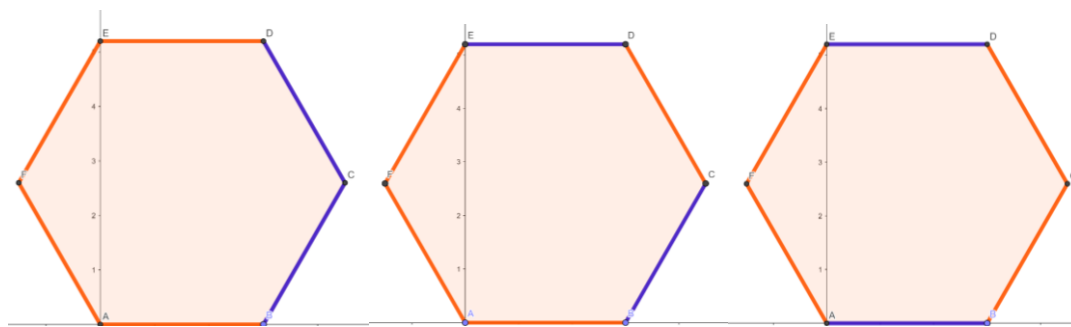
$10 \times 2(\text{交叉與不交叉}) \times 8(=4 \times 2 \times 1, \text{三邊大亂鬥線條類型}) = 160$



## II. 兩條邊

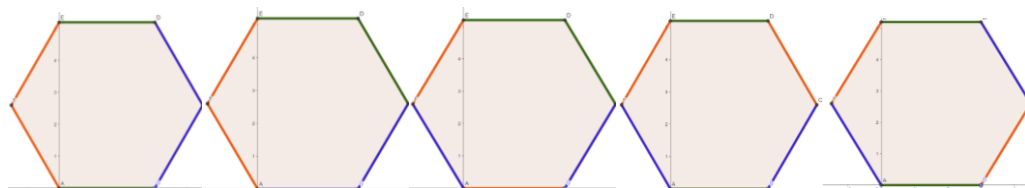
(I) 兩邊混四邊混 (2, 4)

$3(\text{邊的型態 旁邊、斜邊、對邊}) \times 2(\text{交叉和不交叉}) \times 48(=6 \times 4 \times 2 \times 1 \text{ 四邊大亂鬥線條類型}) = 288$



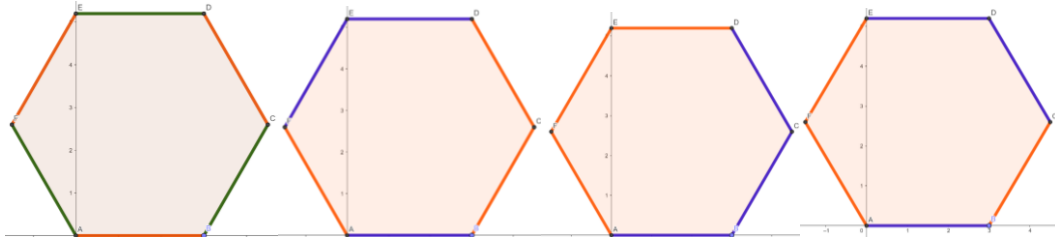
(II) 兩邊混\*三(2, 2, 2)

$5(\text{邊的類型}) \times 2 \times 2 \times 2(\text{都是交叉和不交叉}) = 40$



### III. 三條邊( I )三邊混\*2(3, 3)

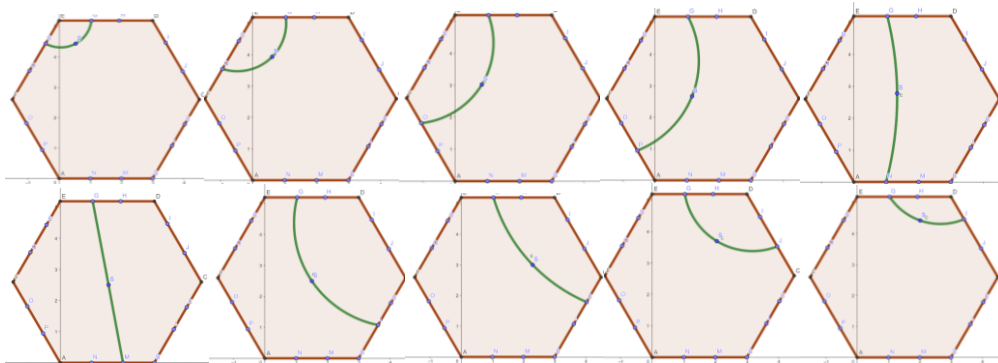
$$4(\text{邊的類型}) * 8(=4 * 2 * 1, \text{線條類型}) * 8(=4 * 2 * 1, \text{線條類型}) = 256$$



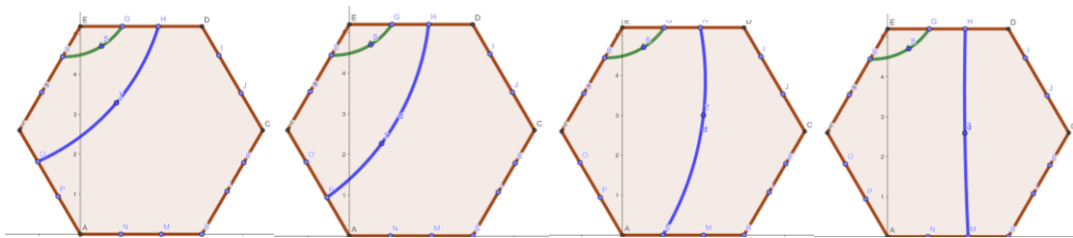
### IV. 六條邊( I )六邊混(6)(六邊大亂鬥線條類型)

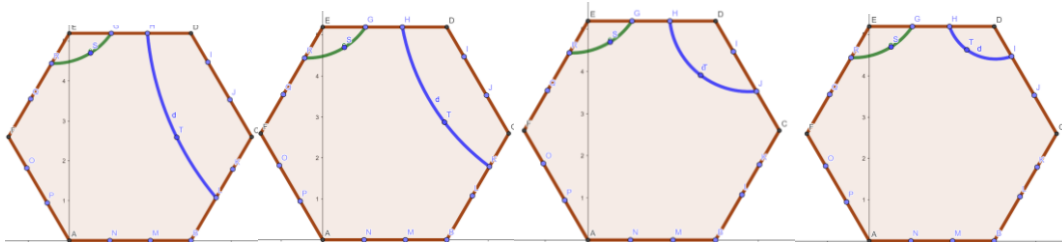
$$10 * 8 * 6 * 4 * 2 * 1 = 3840$$

六邊十二個點，任選其中一點開始連接，不能選擇同邊上的點，因為會形成肉包，所以必定只剩下十種可能。

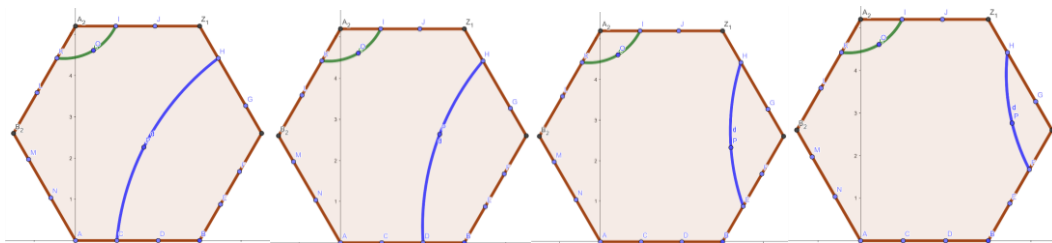
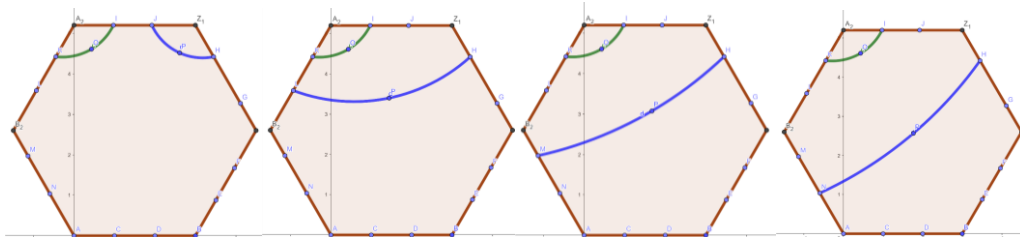


接下來的第二點有兩種可能，第一種是選擇邊上有線的隔壁點出發，同樣不能連到邊上有線的隔壁點，這樣成為兩邊混類型，重複計算，所以第二條線起始點只能有八點選擇。

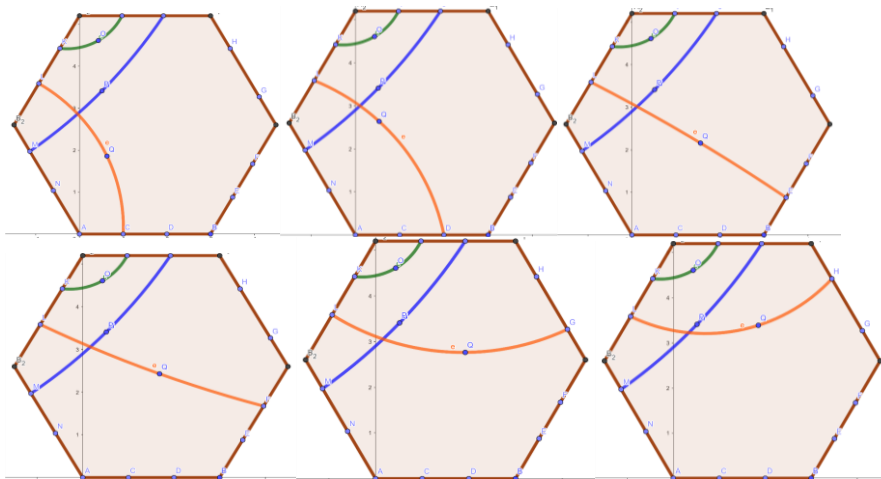




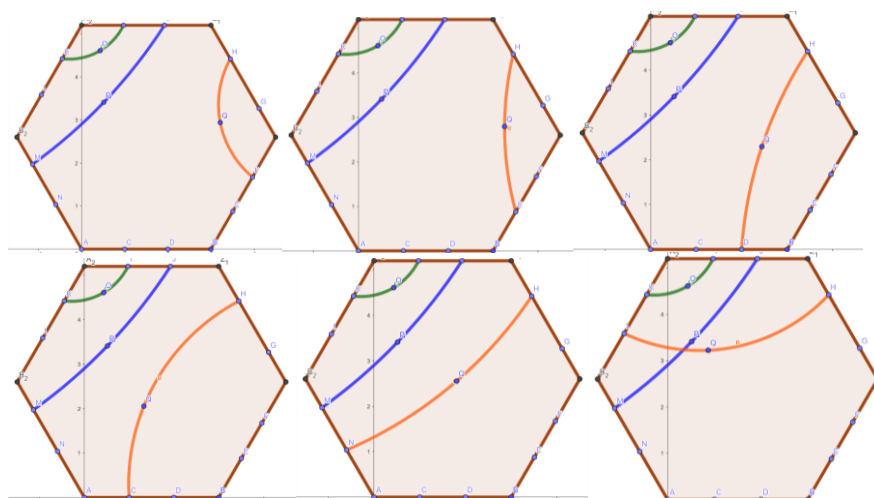
第二種是沒有線條的邊上任意一點，也是只能夠連接八點，因為不能夠連接自己同邊上的隔壁點，只剩八點可以選擇。



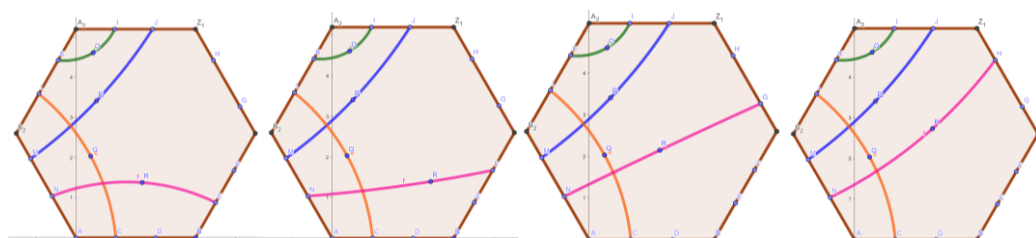
第三條線的起始點只能連接六個點，同樣兩種狀況，第一種狀況第三條線起始點位於第一、第二條線結束點(或起始點)旁邊的點，只可連接完全沒有線的邊上點，不可連接已有線的邊上點，因為這樣會造成三三亂鬥(和前面重複計算)。



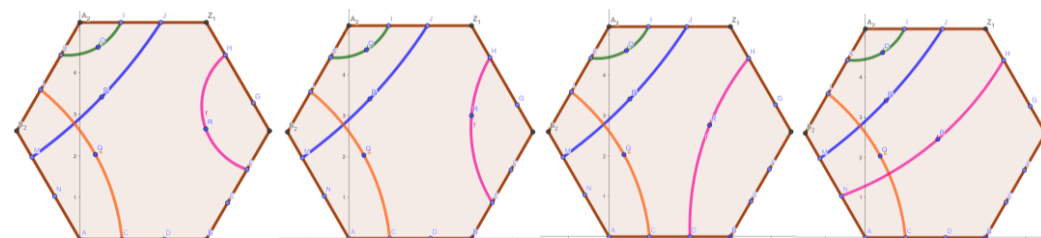
第二種狀況是第三條線的起始點為沒有線條的邊上任一點，不能夠連接同邊上的隔壁點，會形成一個肉包，也是只剩六點可以選擇。



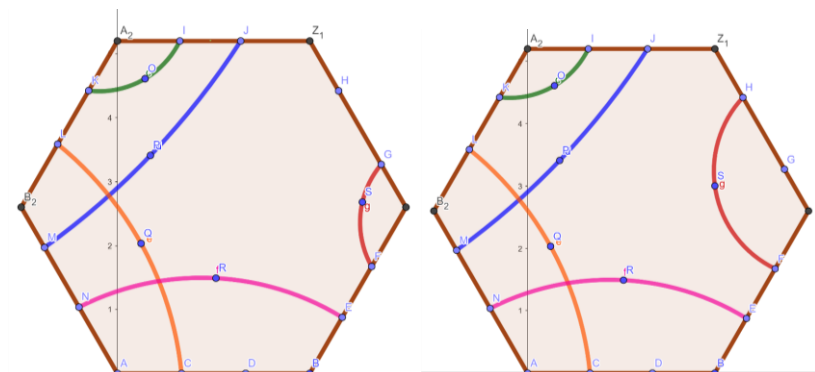
剩下六個點，任選其中一點開始連接，第一種狀況第四條線起始點位於第一、二、三條線結束點(或起始點)旁邊的點，只可連接完全沒有線的邊上任一點，不可連接已有線的邊上點，因為這樣會造成四二大亂鬥(和前面重複計算)，只剩四點可以選擇。



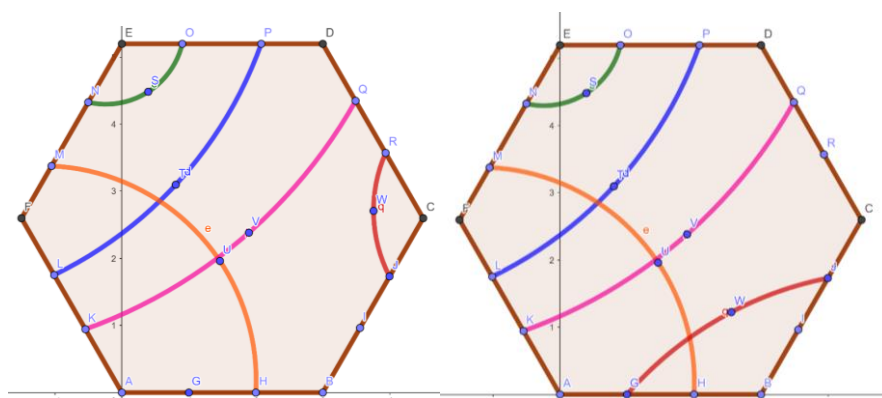
第二種狀況是第四條線的起始點為沒有線條的邊上任一點，因為不能夠連接自己的隔壁點，會形成一個肉包，所以只剩四點可選。



最後四點同樣有兩種狀況，第一是由邊上有線的點任選一點開始，不能選擇同樣邊上有線的點，因為會讓剩下的一邊(邊上沒線的兩點)形成肉包。



第二種狀況由邊上沒線的點開始，不能選擇同邊的隔壁點，因為會形成肉包，所以同樣只剩兩點可選。



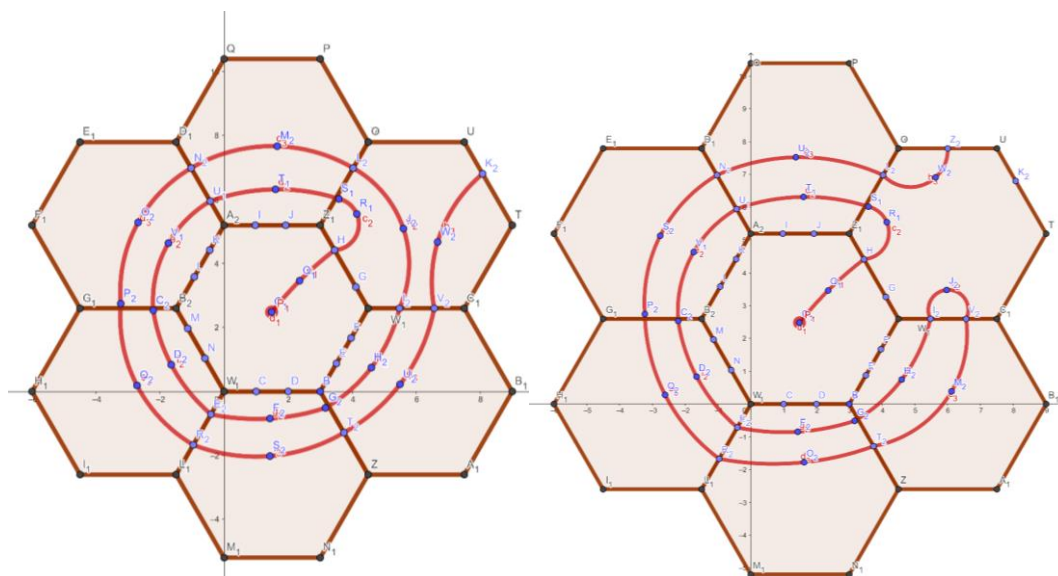
剩下最後兩點，只能形成一條線。

### (3)統計

| 類型 | 六個肉包   | 四個肉包      | 三個肉包   | 二個肉包 | 一個肉包 |
|----|--------|-----------|--------|------|------|
| 數量 | 1      | 6         | 32     | 84   | 544  |
| 類型 | (2, 4) | (2, 2, 2) | (3, 3) | (6)  | 總計   |
| 數量 | 288    | 40        | 256    | 3840 | 5091 |

### (四)第一層棋盤玩法

1. 理想狀況下的最高得分： $1+1+1+1+1+(1+2+3+4+5+6+7+8)=41$



| 卡牌    | 得分  | 卡牌    | 得分                     |
|-------|-----|-------|------------------------|
| 第一張卡牌 | 1 分 | 第四張卡牌 | 1 分                    |
| 第二張卡牌 | 1 分 | 第五張卡牌 | 1 分                    |
| 第三張卡牌 | 1 分 | 第六張卡牌 | $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ 分 |

思考：第一張卡牌扣除外面三邊和起始邊，只剩下兩邊四(因為連結起始邊上的點會形成肉包死亡)個點可選擇，第二張卡牌扣除外三邊和內一邊，只剩下兩邊三個點(因為扣除自己的出發點)可選擇，同樣的第三、四、五、六張卡牌，都是同樣的狀態。當我們回到第一張卡牌時，第一章卡牌只剩下兩點可選擇，第一種狀況是繼續連接第二張卡牌的第二點，或是第二種狀況連接同邊上的隔壁點形成一個肉包，不論哪一種狀況，都是繞第二圈，前者逆時針、後者順時針，直到每一個卡牌上的點都連完，最後只剩下外三邊的點可以連接，到此遊戲結束，獲得最高分。

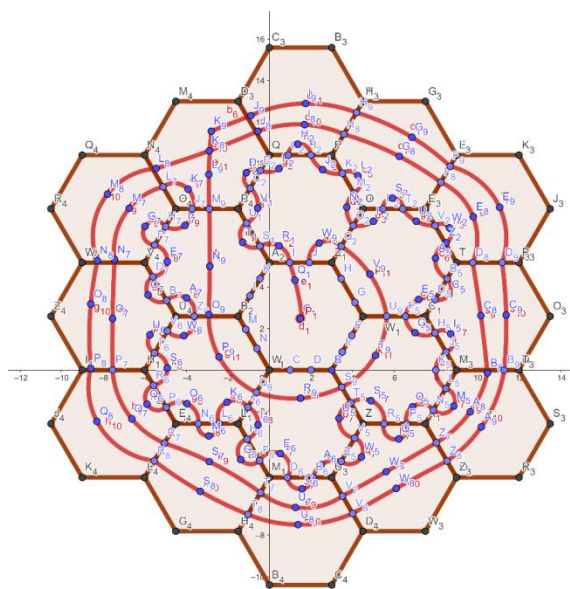
觀察發現：

1. 每一格正六邊形，扣除外三邊和內一邊，只剩下兩邊四個點可以運用，兩點為一線，每一格正六邊形只有兩線進出的機會。
2. 計算運用的邊(可重複計算):每進出一個邊，就會獲得一個分數，總共進出  $13(6*2+1)$  次，剛好得到了 13 個數字(計分)。

## (五)第二層棋盤玩法

### 1. 理想狀況一(小花)：

$$1+3*11+6*4+15+561=634$$

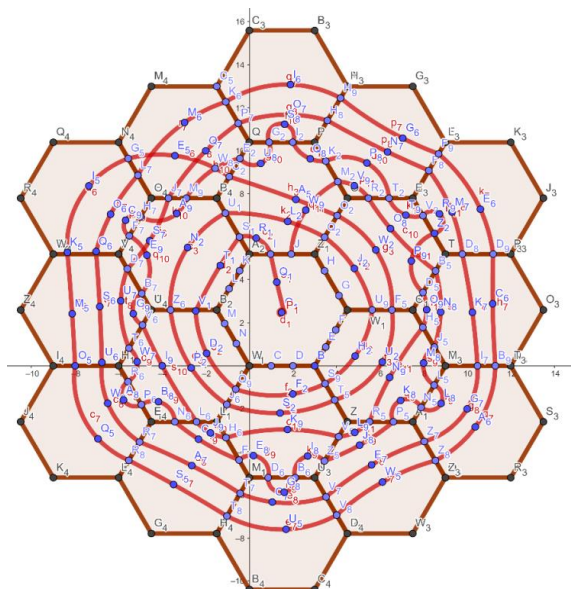


### 得分計算

| 卡牌    | 得分        | 卡牌     | 得分             |
|-------|-----------|--------|----------------|
| 第一張卡牌 | 1 分       | 第十張卡牌  | 1+2=3 分        |
| 第二張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十一張卡牌 | 1+2=3 分        |
| 第三張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十二張卡牌 | 1+2+3=6 分      |
| 第四張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十三張卡牌 | 1+2=3 分        |
| 第五張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十四張卡牌 | 1+2=3 分        |
| 第六張卡牌 | 1+2+3=6 分 | 第十五張卡牌 | 1+2+3=6 分      |
| 第七張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十六張卡牌 | 1+2=3 分        |
| 第八張卡牌 | 1+2=3 分   | 第十七張卡牌 | 1+2+3+4+5=15 分 |
| 第九張卡牌 | 1+2+3=6 分 | 第十八張卡牌 | 1+...+33=561 分 |

### 理想狀況二(同心圓)：

$$1*16+36+1225=1277$$



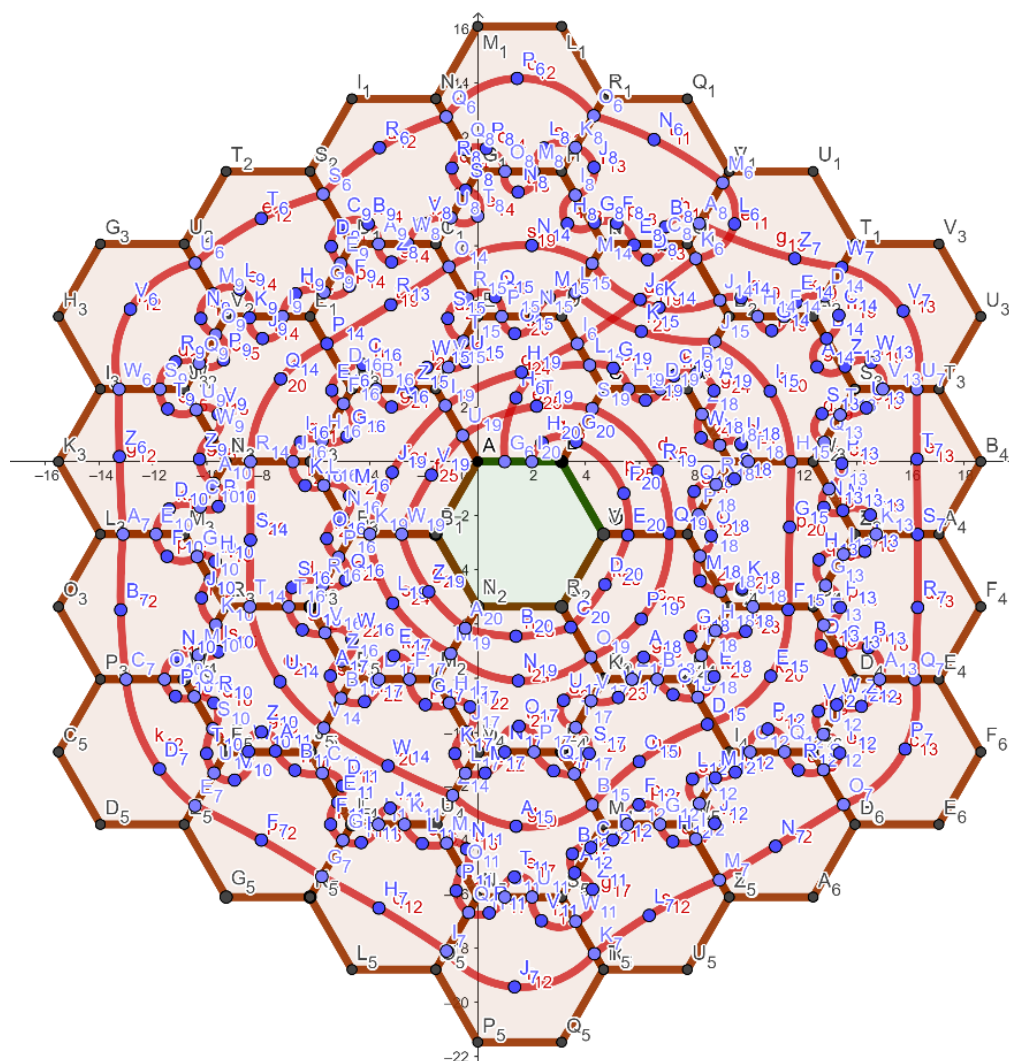
| 卡牌      | 得分           | 卡牌       | 得分            |
|---------|--------------|----------|---------------|
| 第一~五張卡牌 | 各得 1 分       | 第七~十七張卡牌 | 各得 1 分        |
| 第六張卡牌   | 1+...+8=36 分 | 第十八張卡牌   | 1+...+49=1225 |

觀察與發現：

1. 我們分析棋盤，發現第一層棋盤六格都是五邊重複鄰邊，代表線條有五次的進出機會；第二層棋盤分為兩種，第一種是三邊重複鄰邊共有六格，第二種是四邊重複鄰邊同樣也有六格。
2. 計算運用的邊(可重複計算)：每進出一個邊，就會獲得一個分數，總共進出  $73(6+5*5+6*3+6*4)$  次，剛好得到了 73 個數字(計分)。
3. 比較小花與同心兩種狀況，同心圓獲得高分，分析發現只要路徑多一格，分數是以數列的方式累積，得分就會多很多。

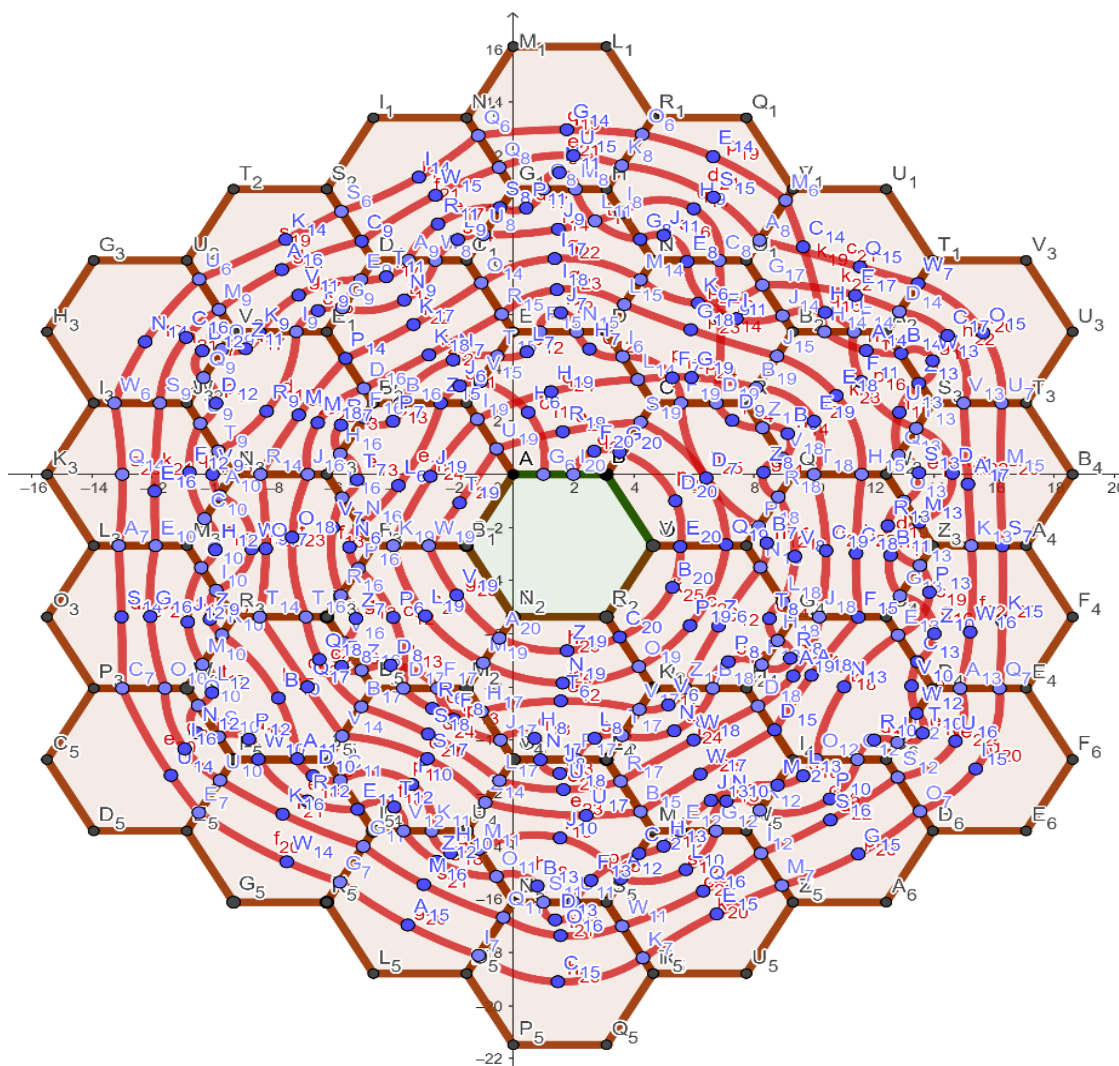
#### (六)第三層棋盤玩法

1. 理想狀況下的最高得分： $1*5+36+6*13+15*16+136+351=846$



| 卡牌                                                           | 得分                     |
|--------------------------------------------------------------|------------------------|
| 第一~五張卡牌                                                      | 各得 1 分                 |
| 第六張卡牌                                                        | $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ 分 |
| 第七、八、十、十二、十四、十六、十九、二十、二十三、二十六、二十九、三十二、三十五張卡牌                 | $1+2+3=6$ 分            |
| 第九、十一、十三、十五、十七、二十一、二十二、二十四、二十五、二十七、二十八、三十、三十一、三十三、三十三、三十四張卡牌 | $1+2+3+4+5=15$         |
| 第十八張卡牌                                                       | $1+2+3+\dots+16=136$   |
| 第三十五張卡牌                                                      | $1+2+3+\dots+26=351$   |

理想狀況二： $1*33+36+105+6555=6729$



| 卡牌                     | 得分                     |
|------------------------|------------------------|
| 第一~五張卡牌                | 各得 1 分                 |
| 第六張卡牌                  | $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ 分 |
| 第七~十七張卡牌<br>第十九~三十五張卡牌 | 各得 1 分                 |
| 第十八張卡牌                 | $1+2+3+\dots+14=105$   |
| 第三十六張卡牌                | $1+2+3+\dots+114=6555$ |

觀察與發現：

1. 分析三層棋盤，第一層棋盤有五邊重覆鄰邊；第二層棋盤是六邊重覆鄰邊；第三層棋盤分為兩種，第一種是三邊重複鄰邊共有六格，第二種是四邊重複鄰邊有十二格。
2. 計算運用的邊(可重複計算)：每進出一個邊，就會獲得一個分數，總共進出 169 次，剛好得到了 169 個數字(計分)。
3. 比較兩種狀況的得分，我們發現了同心圓的得分比小花高很多，可見數列累積分數很可觀。

## 五、研究結果與討論

(一)卡牌：共 5091 種。

(二)公式：我們觀察發現  $n$  邊大亂鬥，計算線條種類的數量，扣除同邊線條(肉包)，歸納出公式： $2(n-1)*2(n-2)*\dots 2[n-(n-1)]*1$ 。

(三)棋盤：第一層棋盤理想狀態最高分是 41 分，使用同心圓路線，可畫出最長的路徑，使用最多的卡牌線條是彎橋。比較第二層棋盤和第三層棋盤的不同路徑，發現同心圓路徑較長，獲得公差為 1 的等差數列，累積得到高分。

(四)策略：

1. 想要獲得高分，必須獲得越長的路徑越好；比較各種路線，發現使用同心圓，可獲得最長的路徑。

2. 想要獲得最高分必須善用可進出的每一個邊，儘可能地都利用到，不要浪費。

六、評鑑與檢討：(上述每一階段的省思與收穫)

(一)尋找主題：尋找主題並不是一開始就很順利，想了許久都沒有頭緒，以排除法幫助思考，因為之前嘗試過人文主題，不喜歡自然要做實驗，所以選擇數學。利用「昌爸工作坊」的資料，瀏覽一些數學遊戲，綜合考量，覺得「牽連」最有趣，想要知道如何獲得高分，開始研究。

(二)文獻探討：這個遊戲並沒有什麼中文相關資料，不知道該如何展開研究，後來觀察到使用的是正六邊形的遊戲片，於是我們從維基百科中找尋正六邊形的定義，了解特質，思考與運用。

(三)資料分析：同樣的難題，我們不知道如何開始研究，針對線條胡亂命名，因為定義不清楚，命名混亂、搞不清楚，痛定思痛，我們努力地一直觀察遊戲片，從最基礎的項目開始尋找，察覺頂點、角、邊和線條的數量和類型，重新定義和分析，才漸漸進入佳境。討論過程中，因為是正六邊形，原本自己手工畫圖或是依賴正六邊形的模具仿畫，藉由這些仿畫遊戲片來操作思考，但是不甚理想，因為畫得不精準，討論過程也不順利，一直很傷腦筋，後來學習經典的數學幾何軟體「Geogebra」，一切變得較為順利。

(四)研究結果：我們的目標是希望能破解遊戲獲得高分，針對每一個項目努力思考釐清它的設計與變化，絞盡腦汁的想出各種可能，突破了重重難關，計算了各種線條、邊、頂點的變化，終於有一些小小的收穫與心得。

(五)撰寫報告：因為這篇報告中，有許多幾何線條的定義與解說，我們必須圖文搭配，一人負責文字解說，遇到的困難就是常常有些狀況不知道如何描述表達，解決方式是思考狀態命名再加以解說；

另一人搭配解說文字，儘量畫出各種變化的圖，一開始也不是畫得很順手，後來想到運用顏色搭配，表達出各種變化，讓解說的圖形更容易讓人理解。

#### 七、參考資料(未附者不予審查)

1. 昌爸工作坊/數學遊戲

<http://www.mathland.idv.tw/game/mathgame.htm>

2. 遊戲網站 Entanglement <https://reurl.cc/G5xegG>

3. 維基百科 <https://reurl.cc/yDrk02>