

彰化縣 113 學年度國民中小學學生獨立研究作品甄選
作品說明書

作品編號：

組別：
☐國小組
☒國中組
☒數學類
☐自然、科技類
☐人文社會類

作品名稱：三角形與矩形面積和周長相等之可能性探討

第一階段 研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃

獨立研究是資優教育具特色的一環，參與獨立研究作品甄選更是本校推動科學教育、語文教育中的一項活動。本校的獨立研究課程分成語文與數理兩類提供通過語文組、數理組及一般智能組學生修習；在老師引導下，透過獨立研究過程的學習，訓練學生蒐集資料、分析資料、統整與發表之能力；並培養學生對研究領域之專精化程度與深入研究之精神。

(一)抽離式資優班課程中設立獨立研究、專題研究等相關課程：

七年級時讓資優生找出小組或個人感興趣的主題，進行研究。八年級時將更加強調研究之完整性，檢視報告進行充實與修改，增進研究報告撰寫與發表之能力。近幾年更將新興科技的智能車創作融入於課程中，提升學生的創作力；此外，輔導室亦會於每年寒暑假皆會辦理資優生的增能營隊。

(二)對一般學生辦理研究性社團：

本校利用社團活動時間及週六上午時間成立研究性社團(科展、獨立研究、網界博覽會、機器人程式語言、…)，延聘校內外專業、有經驗的老師，以團隊方式共同規劃、開辦相關研習課程。本校師生近幾年亦相當踴躍投入縣內辦理之獨立研究競賽，數學、自然與生活科技及人文社會類均曾獲獎，得獎學生會利用社團時間進行經驗分享與傳承。

(三)教師增能研習：

邀請獨立研究、科展相關領域教授、專家蒞校進行獨立研究、科展的講座，期待透過指導老師的增能研習，能有更好的能力與方式帶領學生深入探究、分析每一個議題。

二、學校如何提供該生獨立研究訓練

資優資源班的課程透過系統化的設計，讓學生從瞭解主題方向

的擬定、資料的收集、問題的設定、資料的分析技巧、內容編輯…等，以培養學生探究的能力。無論是資優資源班學生或是一般生，只要有興趣者，指導老師會透過密集的引導、時間規劃的安排、小組協調，讓參與的學生能夠自主性地完成相關研究內容。針對資源不足之處，則由老師對外尋求協助，待作品完成後，協助學生製作簡報、訓練發表的技巧，讓學生從整個歷程中學到不少解決問題的能力。

第二階段 獨立研究階段

一、研究動機

在搜尋可做為參考題材的文獻時，我們看了有關了三角形和矩形的周長還有面積關係的研究，看了之後發現之前的人在做的研究還有一些可作為延伸以及不足的地方，這也讓我們決定將這些問題做個統整，也延伸出了這次的題目。

如果給你一條繩子，要如何才能圍出最大的面積？我們不假思索地給出答案：圓形。如果用這條繩子圍出一個矩形，怎麼樣可以讓面積最大？思考了一下，我們仍然輕一個給出答案：正方形。那麼如果要用這條繩子，圍出一樣大的四邊形、三角形，有可能做得到嗎？我們沉默了，直覺告訴我們應該可以，但是真的圍得出來嗎？

我們想要知道有沒有可能作出同樣周長及面積的三角形與矩形？或者是同樣周長及面積的三角形與正方形，如果有的話，那又會在甚麼情況下是有的，以及如何去把它畫出來，所以我們便開啟了此次的研究。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表

(一) 擬定研究計畫

我們首先訂定研究方向後開始進行初步的實驗，從大膽的假設，

驗證假設的可能性，後來開始一步一步地慢慢試錯已經修正自己的研究方法。其中更找了一些對研究有幫助的公式來讓研究更順利的進行和證明。例如：等周定理(同樣周長的正多邊形，邊越多面積越大)、海龍公式以及一些其他的文獻。

研究當中老師教會我們使用 *GeoGebra* 這款擁有著能夠作圖和繪圖運算強大數學功能的軟體，讓我們對於研究能先一步透過繪圖來驗證猜想，進而能做出更進一步的證明。

(二) 訂定研究問題

1. 正三角形與同樣周長的正方形面積相同的可能性？
2. 正三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性？
3. 直角三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性？
4. 任意三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性？

(三) 工作進度表

預定進度甘梯圖	112.08.29 112.12.07	112.12.07 112.12.28	112.12.28 113.01.25	113.01.25 113.02.29	113.02.29 113.03.28	113.03.28 113.04.25	113.04.25 113.07.25	113.07.25 113.11.28
文獻閱讀與探索								
擬定研究問題								
初步研究發現								
深入研究問題								
提出研究結果								
歸納研究結果								
整理報告								
進度累計(%)	10	20	35	50	70	80	90	100

三、彙整相關文獻

(一) 第 58 屆科展「探討整數三角形周長與面積的關係與疊合性質」

從整數三角形的定義出發，探討邊長和面積皆為自然數的整數

三角形的特性。進一步深入研究整數三角形周長與面積之間是否存在整數倍關係，以及相關的數學規律，並提出相關的理論假設進行驗證。

研究中給了我們很大的啟發，也更進一步促使我們有了不一樣的想法，想將探討的範圍擴展到三角形與矩形、正方形的關係，試試看有沒有可能找到相同周長面積的三角形和矩形。

(二) 同「周」共「積」(文章取自網路)

研究包括長方形、三角形、圓、菱形等圖形，分析哪些情況下這些圖形的周長與面積數值相等，並設計出幾何作圖來驗證這些條件。其中對於面積和周長關係的計算和想法，為我們研究的三角形和矩形的周長與面積之間的關係提供了參考。

(三) 等周定理(取自維基百科)

等周定理，又稱等周不等式，是一個幾何中的不等式定理，說明了歐幾里得平面上的封閉圖形的周長以及其面積之間的關係。其中的「等周」指的是周界的長度相等。等周定理說明在周界長度相等的封閉幾何形狀之中，以圓形的面積最大；另一個說法是面積相等的幾何形狀之中，以圓形的周界長度最小。

在後續的研究中，因為等周定理可以說明在正 n 邊形周長一樣的情況， n 越大(邊越多)，面積就越大，因此推斷三角形和正方形周長相同的情況下，正方形的面積必定較大，因此兩者不可能周長與面積都相同。

四、資料分析

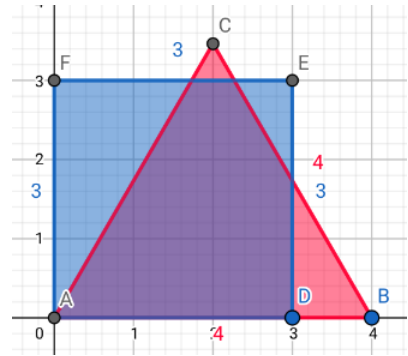
(一)研究流程圖



(二)研究過程

(1)正三角形與同樣周長的正方形面積相同的可能性：

我們使用 *Geogebra* 來進行研究，首先嘗試正三角形和正方形周長固定來調整面積，結果可發現，在形狀周長都固定的情況下，正方形的面積會比較大，且面積規律有跡可循。



後來查閱資料，發現根據等周定理，

周長一定情況下正 n 邊形的 n 越大(邊越多)，面積就會越大；因此我們可以簡單的推論出，在周長固定的條件下，要找到正三角形和正方形的周長和面積相等是不可能的(因為正方形面積必定大於正三角形)。

證明：

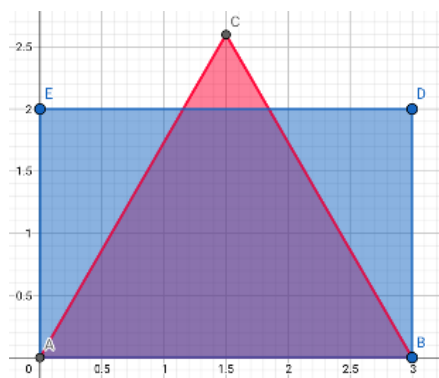
設正方形邊長為 a ，正三角形邊長為 $\frac{4}{3}a$ 。

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{正方形面積} = a^2 \\ \text{正三角形面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{正方形面積} = a^2 > \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2 = \text{正三角形面積}$$

(2)正三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性：

由(1)的結論我們知道，在周長相同的情況下，正方形的面積必定大於任何三角形的面積，因此我們先變換條件，設定為正三角形和矩形，嘗試找出是否存在面積和周長相等的正三角形和矩形。



1. (底邊相同的正三角形和矩形)

設矩形的一邊長和正三角形的邊長一樣，在 *Geogebra* 畫圖的過程中，我們發現是不存在的。

證明：

設正三角形邊長 = a = 矩形的底邊，矩形的高 = y

$$\text{正三角形周長} = 3a, \text{面積} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

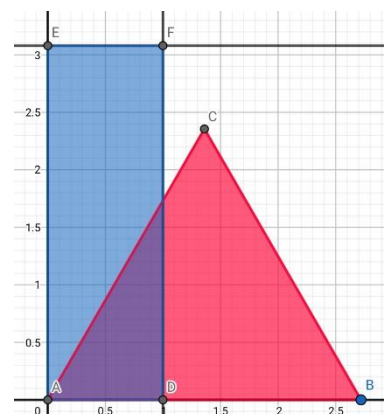
$$\text{矩形周長} = 2(a + y), \text{面積為} ay$$

$$\text{可得聯立方程式} \begin{cases} 3a = 2a + 2y \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2y \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a = y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a \text{ (矛盾)}$$

所以，正三角形和矩形的任意一邊不可以等長，需要多使用一個未知數來進行證明。

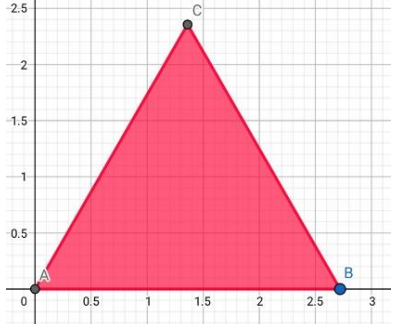
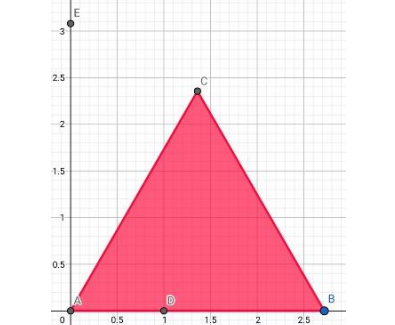
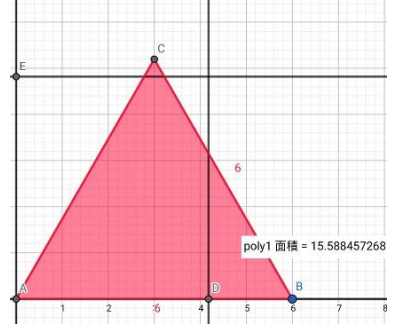
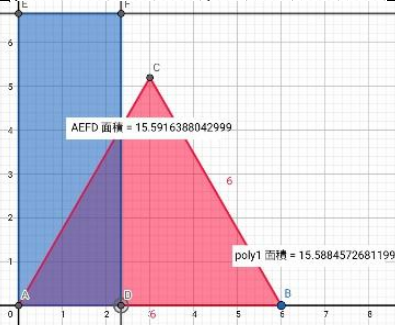
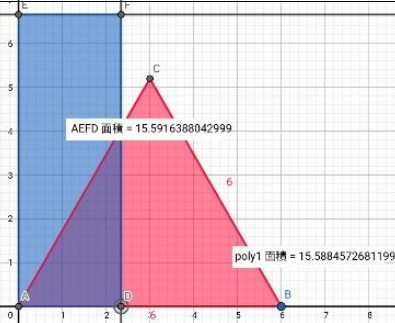
2. (邊長不相同的正三角形和矩形)

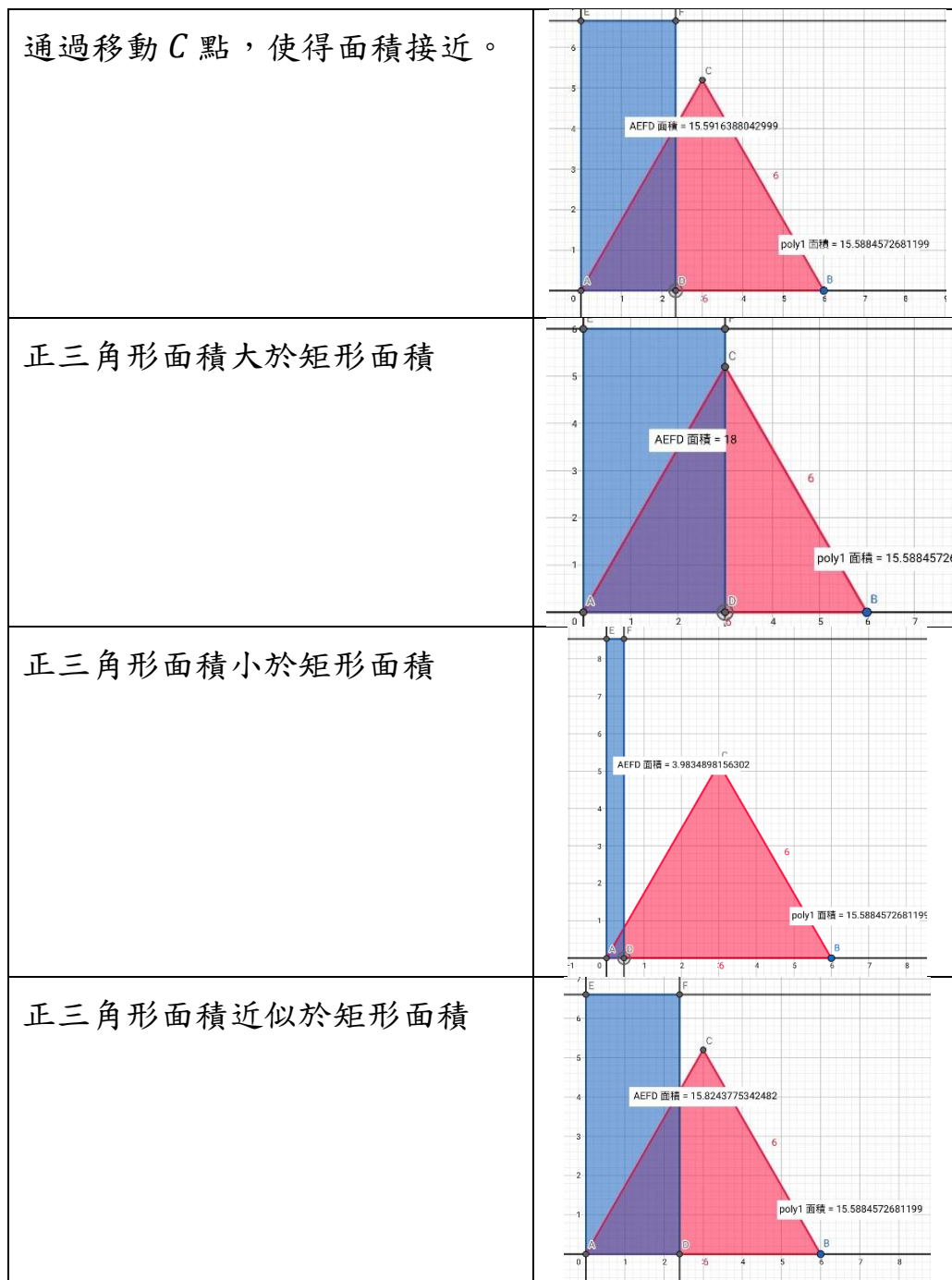
在 *Geogebra* 中我們先設定一個邊長為 a 的正三角形和邊長分別為 x 、 y 的矩形，並透過在 *Geogebra* 中作圖後拉動來測試，最終發現在這樣的限制條件下，應該可以找到符合我們要求的三角形和矩形。



繪圖說明

圖片

設定正$\triangle OAB$	
定義$C(x, 0)$、$D\left(0, \frac{3a-2x}{2}\right)$， x為變數(C為動點) $\overline{OC}$為矩形的長，$\overline{OD}$ 為矩形的寬， 讓正三角形的周長恆等於矩形的周長。	
過C、D分別做垂直於x、y軸的直線交於E點。	
建立矩形$OCED$，其中C為動點。	
標出正$\triangle OAB$、矩形$OCED$的面積。	



透過繪圖發現，面積周長相等的正三角形和矩形應該是存在的，

由於無法精準的繪製圖形，因此我們搭配算式來證明。

設正三角形邊長為 a 矩形的兩邊長分別為 x 和 y ，我們就可列

出聯立方程式：

$$\begin{cases} 3a = 2(x + y) \Rightarrow y = \frac{3a}{2} - x \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = xy \end{cases}$$

$$\text{代入 2 式} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = x\left(\frac{3a}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3a}{2}x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3a}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6ax + \sqrt{3}a^2 = 0$$

$$\text{由公式解得 } x = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 16\sqrt{3}a^2}}{8}$$

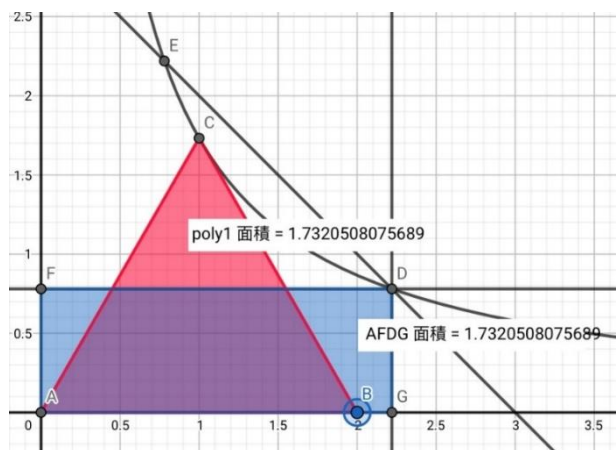
$$\Rightarrow x = \frac{6a \pm 2a\sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{4} \cdot a$$

$$\text{同理可得 } y = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{4} \cdot a$$

因此令 $(x, y) = \left(\frac{3+\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{4}a, \frac{3-\sqrt{9-4\sqrt{3}}}{4}a\right)$ ，即可求得周長和面積

都相等的正三角形和矩形。

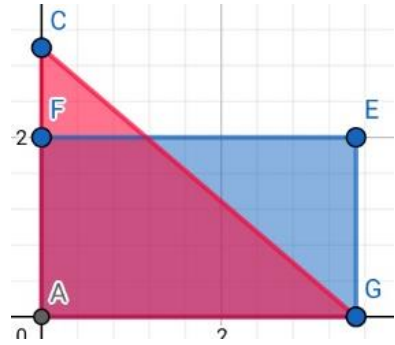


(3) 直角三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性：

如同正三角形的模式，我們將其套用到直角三角形做實驗。

1. 設定直角三角形的兩股分別為 a 、 b ，矩形的邊長為 a 、 y (減少未知數)，在 *Geogebra* 畫圖的過程中，我們發現是不存在的。

證明：



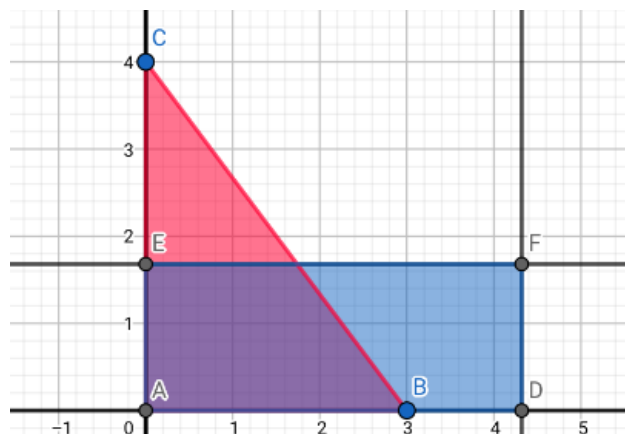
設直角三角形底邊 = a ，高 = b ；矩形的底邊 = a ，高 = y

$$\text{直角三角形周長} = \sqrt{a^2 + b^2} + a + b, \text{面積} = \frac{1}{2}ab$$

$$\text{矩形周長} = 2(a + y), \text{面積為} ay$$

$$\begin{aligned} &\text{可得聯立方程式} \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a + b = 2a + 2y \\ \frac{1}{2}ab = ay \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b}{2} = y \\ \frac{1}{2}b = y \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a + b}{2} = \frac{1}{2}b \\ \Rightarrow &\sqrt{a^2 + b^2} - a = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = a \text{ (矛盾)} \end{aligned}$$

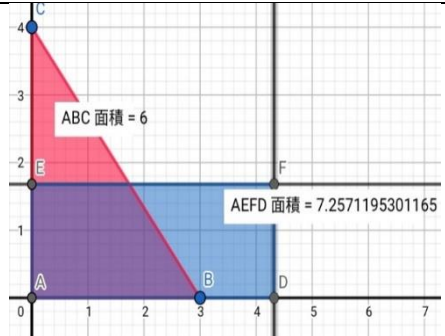
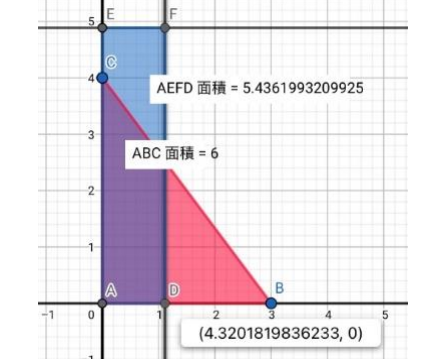
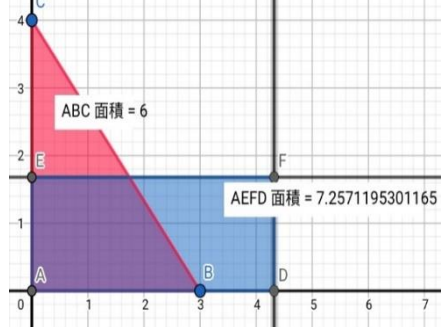
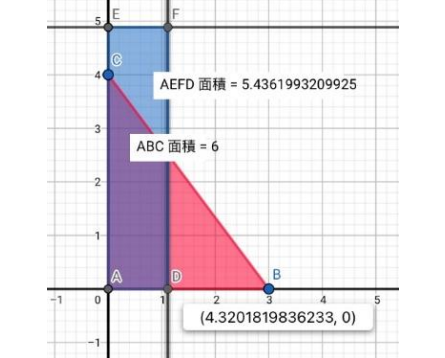
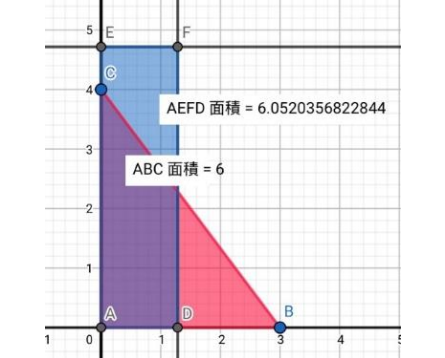
所以，直角三角形和矩形的任意一邊不可以等長，因此在這裡的證明需要使用四個未知數。



2. (邊長不相同的直角三角形和矩形)

在 *Geogebra* 中我們先設定一個底邊為 a ，高為 b 的直角三角形和邊長分別為 x 、 y 的矩形，並透過在 *Geogebra* 中作圖後拉動來測試，最終發現在這樣的限制條件下，應該可以找到符合我們要求的三角形和矩形。

繪圖說明	圖片
設定直角 $\triangle OAB$	
定義 $C(x,0)$ 、 $D\left(0, \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a+b}{2} - x\right)$ ， x 為變數(C 為動點) $\overline{OC}$ 為矩形的長， $\overline{OD}$ 為矩形的寬， 讓直角三角形的周長恆等於矩形的周長。	
過 C 、 D 分別做垂直於 x 、 y 軸的直線交於 E 點。	
建立矩形 $OCED$ ，其中 C 為動點。	

標出直角$\triangle OAB$、矩形$OCED$的面積。	 ABC 面積 = 6 AEFD 面積 = 7.2571195301165
通過移動 C 點，使得面積接近。	 AEFD 面積 = 5.4361993209925 ABC 面積 = 6 (4.3201819836233, 0)
直角三角形面積大於矩形面積	 ABC 面積 = 6 AEFD 面積 = 7.2571195301165
直角三角形面積小於矩形面積	 AEFD 面積 = 5.4361993209925 ABC 面積 = 6 (4.3201819836233, 0)
直角三角形面積近似於矩形面積	 AEFD 面積 = 6.0520356822844 ABC 面積 = 6

透過繪圖發現，面積周長相等的直角三角形和矩形應該是存在的，由於無法精準的繪製圖形，因此我們搭配算式來證明。

設直角三角形底邊為 a ，高為 b ，矩形的兩邊長分別為 x 和 y ，我們就可列出聯立方程式：

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} + a + b = 2(x + y) \\ \frac{ab}{2} = xy \end{cases}$$

$$\text{令 } S_{\text{直}} = \sqrt{a^2 + b^2} + a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\text{直}} = 2(x + y) \Rightarrow y = \frac{S_{\text{直}}}{2} - x \\ \frac{ab}{2} = xy \Rightarrow y = \frac{ab}{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{直}}}{2} - x = \frac{ab}{2x}$$

$$\Rightarrow S_{\text{直}} \cdot x - 2x^2 = ab$$

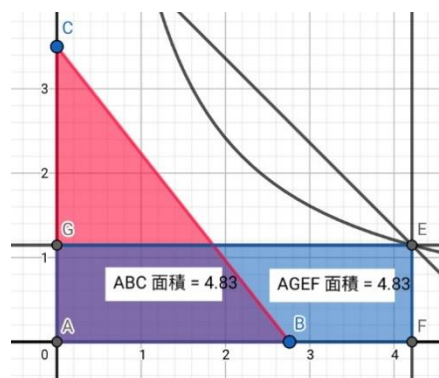
$$\Rightarrow 2x^2 - S_{\text{直}} \cdot x + ab = 0$$

$$\text{由公式解得 } x = \frac{S_{\text{直}} \pm \sqrt{S_{\text{直}}^2 - 8ab}}{4}$$

$$\text{同理可得 } y = \frac{S_{\text{直}} \mp \sqrt{S_{\text{直}}^2 - 8ab}}{4}$$

因此令 $(x, y) = \left(\frac{S_{\text{直}} + \sqrt{S_{\text{直}}^2 - 8ab}}{4}, \frac{S_{\text{直}} - \sqrt{S_{\text{直}}^2 - 8ab}}{4} \right)$ ，即可求得周長

和面積都相等的任意三角形和矩形。



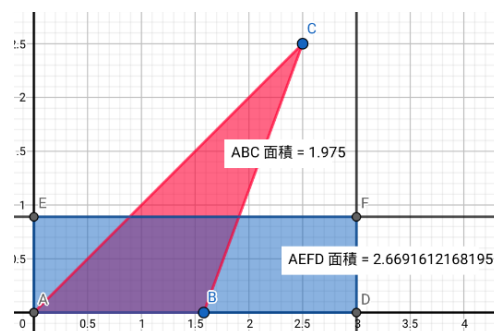
(4)任意三角形與同樣周長的矩形面積相同的可能性：

由於前面兩次的經驗，在任意三角形中，我們直接進行公式的推導。

設三角形的三邊長為 a 、 b 、 c

矩形的兩邊長分別為 x 和 y ，

我們就可列出聯立方程式：



$$\begin{cases} a + b + c = 2(x + y) \\ \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)} = xy \end{cases}$$

$$\text{令 } S = \frac{a + b + c}{2}, A = \sqrt{S(S - a)(S - b)(S - c)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2S = 2(x + y) \\ A = xy \end{cases} \Rightarrow S = x + y \Rightarrow y = S - x$$

$$\text{代入得 } \Rightarrow A = x(S - x) = Sx - x^2$$

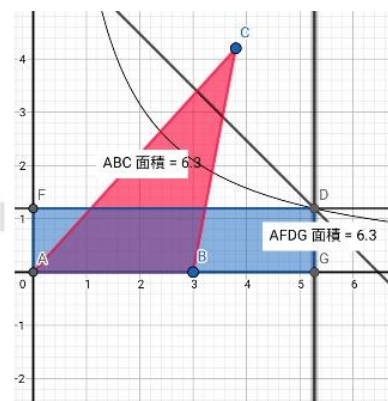
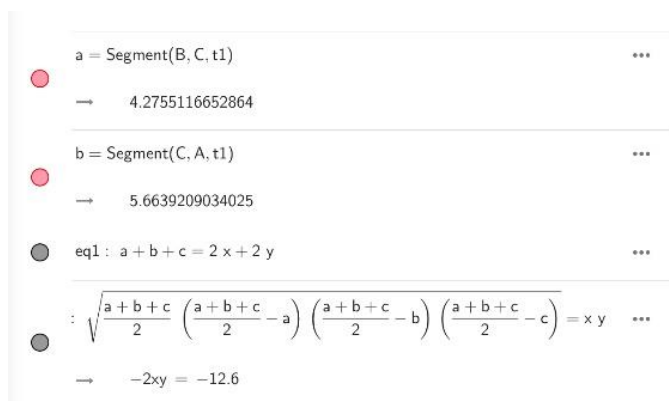
$$\Rightarrow x^2 - Sx + A = 0$$

$$\text{由公式解得 } x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4A}}{2}$$

$$\text{同理可得 } y = \frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4A}}{2}$$

因此令 $(x, y) = \left(\frac{S + \sqrt{S^2 - 4A}}{2}, \frac{S - \sqrt{S^2 - 4A}}{2}\right)$ ，即可求得周長和面積都相

等的任意三角形和矩形。



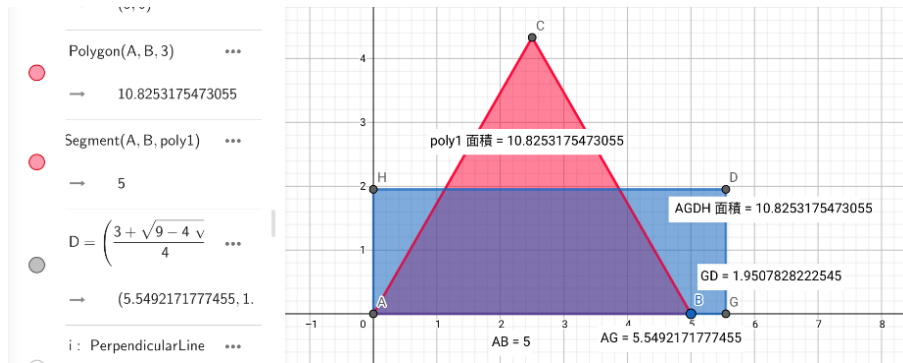
五、提出研究結果

(一)根據等周定理與自身實驗結果證明-同周長的正方形與三角形，面積不可能相同(正方形面積一定較大)。

(二)研究中透過公式的推導，找到了給定特定三角形時，能使得周長和面積相等的矩形。

1. 同周長的矩形和正三角形面積相同的公式為

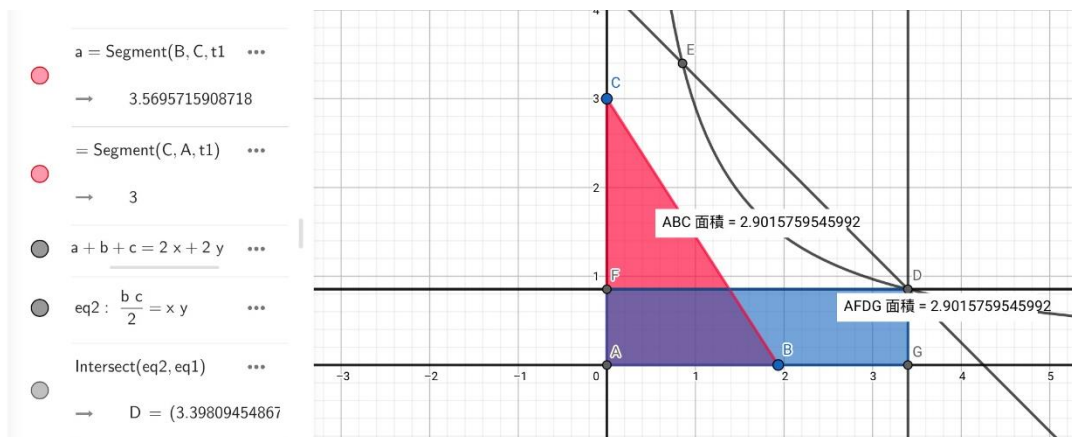
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{4} \cdot a, \quad y = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 4\sqrt{3}}}{4} \cdot a$$



2. 同周長的矩形和直角三角形面積相同的公式為

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a + b \pm \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + a + b)^2 - 8ab}}{4}$$

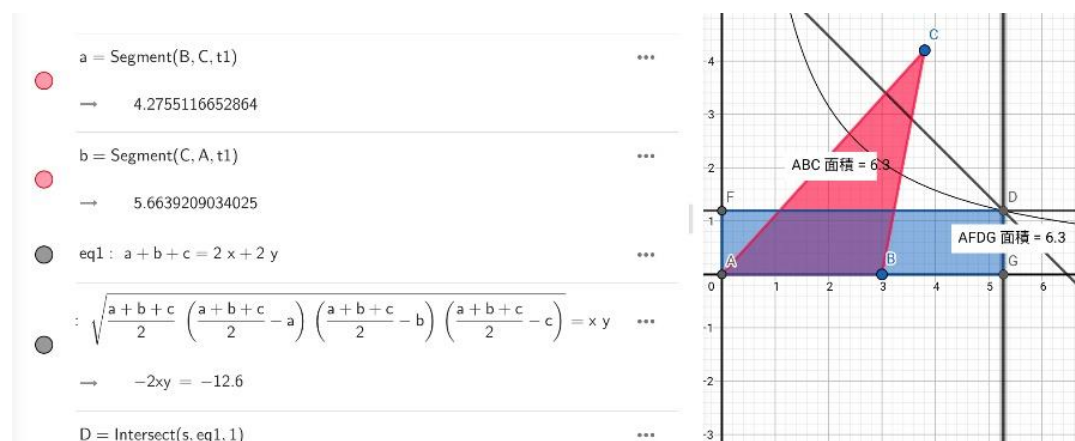
$$y = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a + b \mp \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + a + b)^2 - 8ab}}{4}$$



3. 同周長的矩形和任意三角形面積相同的公式為

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4A}}{2} \quad y = \frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4A}}{2}$$

$$\left(S = \frac{a+b+c}{2}\right) \cdot (A = x(S-x) = Sx - x^2)$$



(三)總結

1. 同周長的三角形 VS 正方形，正方形面積必定較大，因此不可能找到和正方形相同周長與面積的三角形。
2. 根據研究結果可以得出，若給定任意三角形，必定能找到和其周長、面積同時相同的矩形。

六、評鑑與檢討(上述每一階段的省思與收穫)

(一) 研究動機的部分：

起頭階段標題、問題不定，後仔細思考想出可研究之問題，我們再仔細閱讀了許多與幾何圖形相關的文獻後，發現前人的研究還有可做延伸的部分，於是就想出了我們現在的研究題材。從中我們學習到如何快速地讀懂一篇研究，對於後來在看報告非常有幫助。

(二) 擬定正式計畫、研究問題及工作進度表的部分：

剛開始使用 *Geogebra* 有點不熟練，但在經過之後搞懂原理以及操作方法、模式後，逐漸駕馭了操作 *Geogebra* 這款軟體，對之後的研究很有幫助，收穫頗高。除了在研究上使用之外，軟體的使用也讓我們在平常解題的時候有很大的幫助，再遇上解不出的幾何題目時，可以先利用畫圖的方式來理解題目。

(三) 彙整相關文獻的部分：

我們在各種和我們自身研究有相關的歷屆文獻中，嘗試找到對我們研究有幫助的幾篇文獻和定理，這對後續的証明，以及幫助我們理解自己的研究有很大的幫助。

(四) 資料分析的部分：

在進行研究時，我們首先使用繪圖軟體 *Geogebra* 將各種三角形與矩形周長、面積相同的圖形，再來推導各個公式，推導公式時，由於使用了更高年級才會教到的計算方法，沒有學會根本解不出來，陷入瓶頸。於是我們就提前學習，終於把諸如乘法公式、根式運算等等運用的爐火純青。最終終於是找出了矩形和各種三角形周長面積都相等的公式。也間接讓我們在二年級學習這些單元的時候變得無比順利。

(五) 研究結果與討論的部分：

在研究結果的部分，一些條件的限制部份我們尚未完成公式的推導證明。

(1) 在直角三角形的研究結果中，公式解成立的條件有：

$$1. S_{\text{直}}^2 - 8ab > 0 \quad ; \quad 2. S_{\text{直}} - \sqrt{S_{\text{直}}^2 - 8ab} > 0$$

(2) 在任意三角形的研究裡，公式解成立的條件有：

$$1. S^2 - 4A > 0 \quad ; \quad 2. S - \sqrt{S^2 - 4A} > 0$$

我們尚未通過公式來證明上述條件必定成立，但是在拉動圖形的過程我們可以得知，在目前我們研究的範圍當中公式是正確的。

七、參考資料

- (一) 楊家婕、歐陽芊芊、林家仔(2018)。探討整數三角形周長與面積的關係與疊合性質。第 58 屆中小學科學展覽會國中組數學科。
- (二) 同「周」共「積」
- (三) 等周定理