

彰化縣114學年度國民中小學學生獨立研究作品徵選 作品說明書（封面）

作品編號：（由承辦單位編列）

☐ 國小組

☒ 國中組

☒ 數學類

☐ 自然、科技類

☐ 人文社會類

組別：

作品名稱：

等公車為什麼不管什麼時候都比平均時間還長

◎封面切勿出現校名、作者、校長及指導者姓名，違者不予收件。

目錄

第一階段：研究訓練階段	2
一、近二年學校獨立研究課程之規劃：	2
二、學校如何提供該生獨立研究訓練：	3
第二階段：獨立研究階段	5
一、研究動機：	5
二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表：	5
三、彙整相關文獻：	6
四、資料分析：	6
五、研究結果與討論：	12
六、評鑑與檢討：	14
七、參考資料：	15

第一階段：研究訓練階段

一、近二年學校獨立研究課程之規劃：

學校積極鼓勵學生認識、了解、參與縣市舉辦獨立研究競賽，以「學習探索階段」與「實際操作階段」兩階段來進行規劃相關課程，包含開設獨立研究前導課程4節課，並且邀請大學教授利用學生彈性課程時間教導學生研究的實施步驟，協助其理解如何運用研究方法；其次安排個別指導，為學生安排有研究經驗的老師進行「一對一」及「師徒制」指導；最後透過班級內小組教學、跨班級或年級的分組教學，讓學生在互動中學習。

學校規劃獨立研究活動期程如下：

項次	時 間	內 容
1	9月中-10月中	基礎訓練與主題探索階段： 教授獨立研究概念與目的
2	10月中-10月下旬	指導研究方法與步驟
3	10月下旬-11月7日	繳交各組題目，分派指導教師
4	11月初-12月初	研究執行與成果初現階段 ①安排個別指導 ②促進小組學習 ③融入生活經驗與實作 ④鼓勵實作與嘗試 ⑤運用科技與資源
5	12月初-12月中	①12/5校內初選入圍作品公布 ②12/8-12/12公布進入校內作品發表時間並公開發表 ③12/13~修整參賽內容
6	12月中-12月18日	①12/15-12/18校內參賽資料繳交 ②需備齊辦法第4條(2)-(6)附件

二、學校如何提供該生獨立研究訓練：

依照「學習探索階段」與「實際操作階段」兩個階段來訓練學生獨立研究能力，包括教授獨立研究概念與方法、提供個別或小組指導、融入生活經驗與實作學習、並鼓勵學生發表成果以提升其自信心。

1.基礎訓練與主題探索階段(9月中-10月下旬)

(1)教授獨立研究概念與目的(9月中-10月中)：

①讓學生了解獨立研究的意義與目標，建立正確的研究心態，利用學校網頁、導師時間及綜合活動領域輔導活動課程宣導[縣市舉辦獨立研究競賽]，發放前導課程報名表，鼓勵學生積極參與報名。

②利用導師時間，學生使用學校平板查找各縣市優秀作品，期望學見賢思齊，並設計學習單讓學生整理縣市各年度獲獎作品之優勢及特點進行比較，激發學生參賽及研究意願。

(2)指導研究方法與步驟(10月中-10月下旬)：

開設獨立研究前導課程4節課，邀請大學教授利用學生彈性課程時間，教導學生研究的實施步驟，協助其理解如何運用研究方法，並克服對繁瑣過程的恐懼。

2.研究執行與成果初現階段(10月下旬-11月下旬)

(1)安排個別指導：為學生安排有研究經驗的老師進行「一對一」或「師徒制」指導。

(2)促進小組學習：透過班級內小組教學、跨班級或年級的分組教學，讓學生在互動中學習。

(3)融入生活經驗與實作：從學生的生活經驗和興趣出發，設計與其實際情境相關的研究題目。

(4)鼓勵實作與嘗試：引導學生實際動手操作，強調實作學習的經驗。

(5)運用科技與資源：善用科技及資訊輔具輔助教學，並運用社區資源。

3.報告撰寫與成果發表階段(11月下旬-12月中旬)

(1)舉辦成果發表：舉辦研究成果發表會，讓學生公開展現成果，增強其研究動機、信心及表達能力。

(2)給予正向回饋：透過觀眾的回饋，讓學生獲得成就感，並從中學習，進而鼓勵他們進行更高層次的研究。

第二階段：獨立研究階段

一、研究動機：

有一個假日時，我要搭公車去補習班，但是每次等公車時，都覺得等公車時間等得比應該要等的平均時間還要長，於是就引起了我的好奇心。

二、擬定正式計畫、研究問題及工作進度表：

1.擬定研究計畫：「等公車為什麼不管什麼時候到站等都等得比應該要等的平均時間還長？」。

2.研究問題：(1)真實紀錄或是模擬建構公車到站時間作為試驗對照。(2)如何隨機抽取「人到站時間」？(3)如何分析試驗結果支持研究的假設？(4)如何找到更好的分析方法去驗證支持研究的假設？

3.工作進度：

9 月份			
第1週	第2週	第3週	第4週
了解獨立研究	分組討論	參加知能講座	訂定研究主題
10 月份			
第1週	第2週	第3週	第4週
擬定研究計畫		蒐集參考文獻	
11 月份			
第1週	第2週	第3週	第4週
試驗與研究分析		整理試驗結果	
12 月份			
第1週	第2週	第3週	第4週
研究報告撰寫			

三、彙整相關文獻：

- 1.會出現這種感覺並不是錯覺，是因為公車到站的間隔時間本就有長有短，而長的等待時間占有的時間比較多，所以更可能會落入較長的等待區間。
(https://www.youtube.com/watch?v=wS54Gsq_4sE)
(<https://medium.com/marketingdatascience/%E5%85%AC%E8%BB%8A%E7%82%BA%E4%BD%95%E8%80%81%E6%98%AF%E8%AA%A4%E9%BB%9E-%E6%AA%A2%E6%9F%A5%E6%82%96%E8%AB%96-inspection-paradox-3fe4c2e00224>)
- 2.隨機抽取的方法：線上公開電腦程式－隨機亂數產生器
(連結 <https://tw.piliapp.com/random/number/>)
- 3.「加權平均數」、「平均報酬」、「數學期望值」等知識概念。
(<https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-high/math-10/j-m10a/j-m10a-c06/j-m10a-c06-3/v/dq6ywmTKJTU>)

四、研究分析-設計實驗：

1.參考文獻：

根據先前的資料，可知當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

2.假設：

若依照日常公車可能有長有短的到站時間，可能會等待的比每班公車都準時到站的狀況還要久。

3.實驗：

(1)參考都市公車到站時間(平均10分鐘一班車的路線)模擬建構，某日下午四點至五點共有6班，平均應該等待10分鐘，請見下方表格。

第1班	第2班	第3班	第4班	第5班	第6班
10:08	10:21	10:34	10:43	10:54	11:02

(2)使用隨機亂數產生器(連結 <https://tw.piliapp.com/random/number/>)

抽取十個隨機的時間(試驗使用的公車表中離地一班車最近的整點時間→最後一班車的到站時間做為到站的假設時間)，並看有哪些會超過平均需等待的 5 分鐘(若等於到站時間則設為沒搭上，視為下一班)，以下為結果。

平均等待時間計算方式為:假設每班公車接準時到達公車站，則知平均需等待5分鐘($60 \div 6 = 10$ ，則正常需等待的平均時間為 $(0 + 10) \div 2 = 5$ 分鐘)。

抽取人的到站時間	10:23	10:48	10:24	10:44	10:18	10:15	10:25	10:41	10:30	10:12
以最近的一班計算的等待時間(分)	11	6	10	10	3	6	9	2	4	9
是否大於平均等待時間(5分鐘)	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	否	<u>是</u>	<u>是</u>	否	否	<u>是</u>

統計[超過平均等待的時間次數：未超過平均等待時間次數]是7:3，結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

(3)後再進行兩組（每組十次）試驗得出結果依序為：

抽取人的到站時間	10:	10:	10:	10:	10:	10:	10:	10:	10:	10:
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

	43	57	27	24	47	07	17	22	09	49
以最近的一班計算的等待時間(分)	11	5	7	10	7	1	4	12	12	5
是否大於平均等待時間(5分鐘)	<u>是</u>	否	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	否	否	<u>是</u>	<u>是</u>	否

統計[超過平均等待的時間次數:未超過平均等待時間次數]是6:4，
結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

抽取人的到站時間	10:02	10:39	10:28	10:40	10:02	10:08	10:37	10:33	10:14	10:16
以最近的一班計算的等待時間(分)	6	4	6	3	5	13	6	1	7	5
是否大於平均等待時間(5分鐘)	<u>是</u>	否	<u>是</u>	否	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	否	<u>是</u>	否

統計[超過平均等待的時間次數:未超過平均等待時間次數]是6:4，
結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

後來再進行七組試驗，共計十組試驗(100次)結果如下：

試驗次數	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

試驗結果 (超過：未超過)	7:3	6:4	6:4	5:5	4:6	7:3	3:7	5:5	7:3	6:4
是否支持假設	是	是	是	否	否	是	否	否	是	是

※十組試驗(每組十次)，統計有60%的試驗結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

(4)參考都市公車到站時間(平均6分鐘一班車的路線)模擬建構，某日上午八點至九點共有10班，平均應該等待6分鐘，請見下方表格。

第 1 班	第 2 班	第 3 班	第 4 班	第 5 班	第 6 班	第 7 班	第 8 班	第 9 班	第 10 班
8:00	8:08	8:11	8:26	8:31	8:38	8:40	8:46	8:53	9:00

依上述方式重新進行實驗:使用隨機亂數產生器(連結
<https://tw.piliapp.com/random/number/>)

抽取十個隨機的時間(實驗使用的公車表中離地一班車最近的整點時間 →最後一班車的到站時間做為到站的假設時間)，並看有哪些會超過平均需等待的 3 分鐘(若等於到站時間則設為沒搭上，視為下一班)，以下為結果。

平均等待時間計算方式為:假設每班公車接準時到達公車站，則知平均需等待3分鐘($60 \div 10 = 6$ ，則正常需等待的平均時間為 $(0+6) \div 2 = 3$ 分鐘)。

抽取人的到站時間	08:30	08:34	08:58	08:06	08:18	08:07	08:19	08:42	08:27	08:01
以最近的一班計算的等待時間(分)	1	4	2	2	8	4	7	4	4	7
是否大於平均等待時間(5分鐘)	否	<u>是</u>	否	否	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>	<u>是</u>

統計[超過平均等待的時間次數:未超過平均等待時間次數]是7:3，
結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

※後再進行兩組（每組十次）試驗得出結果依序為：

抽取人的到站時間	08:21	08:30	08:11	08:38	08:29	08:25	08:46	08:03	08:10	08:45
以最近的一班計算的等待時間(分)	5	1	15	2	3	1	7	5	1	1
是否大於平均等待時間(5分鐘)	<u>是</u>	否	<u>是</u>	否	否	否	<u>是</u>	<u>是</u>	否	否

統計[超過平均等待的時間次數:未超過平均等待時間次數]是4:6，
結果「不支持」研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

抽取人的到站時間	08:	08:	08:	08:	08:	08:	08:	08:	08:	08:
----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

	52	44	47	38	34	21	57	32	19	23
以最近的一班計算的等待時間(分)	1	4	6	2	4	5	6	6	8	3
是否大於平均等待時間(5分鐘)	否	是	是	否	是	是	是	是	是	否

統計[超過平均等待的時間次數:未超過平均等待時間次數]大約是 **7:3**，結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

後來再進行七組試驗，共計十組試驗(100次)結果如下：

試驗次數	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次	第六次	第七次	第八次	第九次	第十次
試驗結果 (超過：未超過)	7:3	4:6	7:3	2:8	6:4	5:5	8:2	6:4	8:2	5:5
是否支持假設	是	否	是	否	是	否	是	是	是	否

※十組試驗(每組十次)，統計有60%的試驗結果支持研究假設：當等待時間有長有短時，更可能會落入更長時間的等待間隔。

五、研究結果與討論：

日常中並不可能有準點的公車，可能會因為實際交通路況、乘客上下車時間、駕駛司機個人心理狀態等不同因素，到站時間不一定

會剛好。因為公車到站的間隔時間不會一致，有的超過平均間隔時間，有的少於平均間隔時間，而長的等待時間占有的時間比較多，所以更可能會落入較長的等待區間。經由上述試驗的結果顯示，兩組建構模擬公車到站時間的對照組，分別進行十組試驗(每組10次，共計100次)，統計結果均為60%顯示等待時間大於平均候車時間的比例高於等待時間小於平均候車時間，如此可以驗證本研究的假設是有達到六成以上的正確性。

再進一步討論，這樣的試驗結果，是否可以充分說明經過數次的試驗結果就可以確定「等待公車時間會比平均時間長」此研究假設的命題？是否可以透過更科學的方法來做確認，於是我們導入加權平均數的概念來作驗證。了解加權平均數的過程，後來進一步了解平均報酬與數學期望值的概念，透過期望值的計算來進行驗證：

加權平均數：

設一組數據 $x_1, x_2, \dots, x_k$ ，每個數據對應權重分別為 $w_1, w_2, \dots, w_k$ ，

加權平均數＝

$$\frac{x_1 \times w_1 + x_2 \times w_2 + \dots + x_k \times w_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k}$$

$$= x_1 \times \frac{w_1}{w_1 + w_2 + \dots + w_k} + x_2 \times \frac{w_2}{w_1 + w_2 + \dots + w_k} + \dots + x_k \times \frac{w_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k}$$

期望值：

若一隨機試驗有 k 種不同的結果，各種結果的報酬分別是 $m_1, m_2, \dots, m_k$ ，分別的機率為 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 且期望值為 E 。則

$$E = m_1 \times p_1 + m_2 \times p_2 + \dots + m_k \times p_k。$$

驗證一：

平均候車時間	4	6.5	6.5	5.5	4.5	4
公車到站的間隔時間	8	13	13	11	9	8

期望值(平均候車時間)

$$\frac{4 \times 8 + 6.5 \times 13 + 6.5 \times 13 + 5.5 \times 11 + 4.5 \times 9 + 4 \times 8}{8 + 13 + 13 + 11 + 9 + 8} = 5.39 > 5$$

驗證結果：「等待公車時間會比平均時間長」

驗證二：

平均候車時間	4	1.5	7.5	2.5	3.5	1	3	3.5	3.5
公車到站的間隔時間	8	3	15	5	7	2	6	7	7

期望值(平均候車時間)

$$\frac{4 \times 8 + 1.5 \times 3 + 7.5 \times 15 + 3.5 \times 7 + 1 \times 2 + 3 \times 6 + 3.5 \times 7 + 3.5 \times 7}{8 + 3 + 15 + 5 + 7 + 2 + 6 + 7 + 7} = 4.25 > 3$$

驗證結果：「等待公車時間會比平均時間長」

六、評鑑與檢討：

經過本次的實驗讓我們發現其實日常中的小事也都具有學問，而研

究出來後就能更理解它的運作方式。就像研究完本實驗後，我也不再覺得我每次很不走運，總是等很久公車，而是知道這本就是會有較高機率發生的。一開始試驗的方法是用隨機亂數產生器隨機抽取人到站等車的時間與平均候車時間作比較，進行簡單紀錄，用比例的方式來呈現，可以很清楚看出試驗的結果。後來再進一步討論思考試驗的完整性與準確性，隨機抽取可能會因為抽取的結果或是抽取的次數而影響試驗的結果，因此，本研究再透過數學期望值的計算來進一步驗證，可以更準確判定本研究的假設是成立的。

檢討本次試驗的過程所欠缺思考的部分：

- 1.試驗方法：本次試驗所使用的隨機亂數產生器，沒有去深入瞭解其設計的理論，無法確定「隨機亂數產生器」的設計原理，也無法去判斷其隨機的公正性。
- 2.建構公車到站時間之對照組：沒有真實去記錄某日某線公車實際到站的時間，而是自行模擬假設建立，缺乏與真實情境作結合。
- 3.研究結果：一開始採用隨機亂數產生器隨機抽取人到站等車的時間與平均候車時間作比較來進行紀錄，方法是否過於簡單？試驗出來的統計結果為60%支持研究假設的成立，但是60%應該稱不上高比率。
- 4.研究延伸建議：本次研究在試驗過程當中，花太多時間摸索試驗的方法，沒有更加深入去研究與探討「檢查悖論」，可以做為日後研究的主題功課。

七、參考資料：

- 1.【畢導】看了這個視頻，你會釋懷你倒霉的一生#檢查悖論#科普#冷知識

https://www.youtube.com/watch?v=wS54Gsq_4sE

- 2.行銷資料科學：公車為何老是誤點?檢查悖論（Inspection paradox）

<https://medium.com/marketingdatascience/%E5%85%AC%E8%BB%8A%E7%82%BA%E4%BD%95%E8%80%81%E6%98%AF%E8%A%A4%E9%BB%9E-%E6%AA%A2%E6%9F%A5%E6%82%96%E8%AB%96-inspection-paradox-3fe4c2e00224>

- 3.為什麼等公車的時間通常會比預期的還久？關於「檢查悖論」

<https://vocus.cc/article/66b78669fd89780001bc3cc4>

- 4.均一教育平台：高中一年級數學第二冊-第六章排列組合與機率-數學期望值

<https://www.junyiacademy.org/course-compare/math-high/math-10/j-m10a/j-m10a-c06/j-m10a-c06-3/v/dq6ywmTKJTU>